

第2章 | 図形の性質



2章

図形の性質

第1節 平面図形

1 三角形の辺の比

A 線分の比と三角形の角の二等分線

まとめ

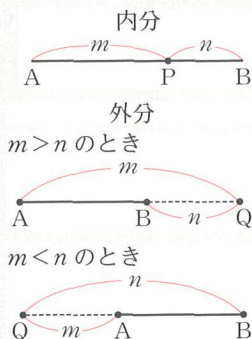
1 内分・外分

 m, n を正の数とする。線分 AB 上の点 P が

$$AP : PB = m : n$$

を満たすとき、点 P は線分 AB を $m : n$ に 内分する という。 m, n を異なる正の数とする。線分 AB の延長上の点 Q が

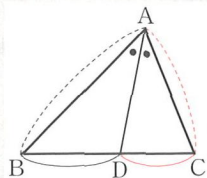
$$AQ : QB = m : n$$

を満たすとき、点 Q は線分 AB を $m : n$ に 外分する という。

2 三角形の内角の二等分線と比

定理1 $\triangle ABC$ の $\angle A$ の二等分線と辺 BC との交点 D は、辺 BC を $AB : AC$ に内分する。

$$\text{すなわち } BD : DC = AB : AC$$

練習
1

下の図において、次の点を図にしろ。

- (1) 線分 AB を $2 : 1$ に内分する点 P
- (2) 線分 AB を $2 : 1$ に外分する点 Q
- (3) 線分 BA を $2 : 1$ に外分する点 R



指針 線分の内分と外分 内分する点 P は線分 AB 上にあり、外分する点 Q は線分 AB の延長線上にあることに注意。また、 $2 : 1$ に外分する点が、線分の右方向の延長線上にあるのか、左方向の延長線上にあるのかにも注意する。

解答 (1) 線分 AB を 2 : 1 に内分する点 P は、線分 AB 上にあり

$$AP : PB = 2 : 1$$

このとき、 $AB=6$ とすると $AP = 6 \times \frac{2}{2+1} = 4$

(2) 線分 AB を 2 : 1 に外分する点 Q は、線分 AB を B の方向に延長した線上にあり $AQ : QB = 2 : 1$

このとき、 $AB=6$ とすると $BQ = 6 \times \frac{1}{2-1} = 6$

(3) 線分 BA を 2 : 1 に外分する点 R は、線分 BA を A の方向に延長した線上にあり $BR : AR = 2 : 1$

このとき、 $BA=6$ とすると $AR = 6 \times \frac{1}{2-1} = 6$

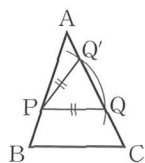


外分する点の場合は、線分をどちらの方向に延長するかに注意しよう。



深める

教科書 p.75 の[2]の3について、逆が成り立たないことを右の図を使って説明してみよう。ただし、 $PQ=PQ'$ である。



教 p.75

解答 例 $AP : AB = PQ : BC$, AC 上に $PQ : PQ'$ となる点 Q' をとると

$$AP : AB = PQ' : BC$$

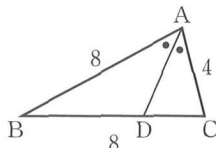
しかし、このとき $PQ' \parallel BC$ でないから、[2]の3の逆は成り立たない。 **終**

練習
2

$AB=8$, $BC=8$, $AC=4$ である $\triangle ABC$ において、 $\angle A$ の二等分線と辺 BC の交点を D とする。次のものを求めよ。

(1) $BD : DC$

(2) 線分 BD の長さ



教 p.76

指針 三角形の内角の二等分線と比 定理1を用いて求める。

解答 (1) AD は $\angle A$ の二等分線であるから

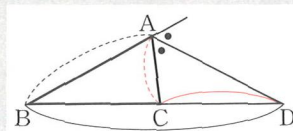
$$BD : DC = AB : AC = 8 : 4 = 2 : 1 \quad \text{答}$$

$$(2) \quad BD = \frac{2}{2+1}BC = \frac{2}{3} \times 8 = \frac{16}{3} \quad \text{答}$$

まとめ

三角形の外角の二等分線と比

定理2 $AB \neq AC$ である $\triangle ABC$ の
 $\angle A$ の外角の二等分線と辺 BC
 の延長との交点 D は、辺 BC を
 $AB : AC$ に外分する。
 すなわち $BD : DC = AB : AC$

 $AB > AC$ の場合

2章

図形の性質

深める

教 p.77

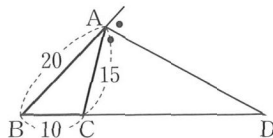
教科書の定理2において、 $AB \neq AC$ としている理由を説明してみよう。

解答 $\triangle ABC$ において、 $AB = AC$ のとき、 $\angle ABC = \angle ACB$
 よって、 $\triangle ABC$ の内角と外角の関係により
 $\angle A$ の外角 $= \angle ABC + \angle ACB = 2\angle ACB$
 $\angle A$ の外角の二等分線を AP とすると2直線 AP , BC について
 $\angle CAP = \angle ACB$ より錯角が等しいから、
 $BC \parallel AP$ であり、 AP と BC は交わらないから。 終

練習
3

$AB = 20$, $BC = 10$, $AC = 15$ である
 $\triangle ABC$ において、 $\angle A$ の外角の二等
 分線と辺 BC の延長との交点を D とす
 る。線分 BD の長さを求めよ。

教 p.77



指針 三角形の外角の二等分線と比 定理2を用いて求める。

解答 AD は $\angle A$ の外角の二等分線であるから
 $BD : DC = AB : AC = 20 : 15 = 4 : 3$
 よって $BD = \frac{4}{4+3}BC = 4 \times 10 = 40$ 答

2 三角形の外心・内心・重心

A 三角形の外心

まとめ

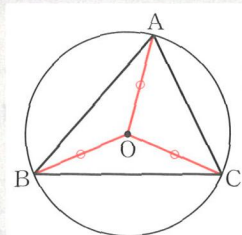
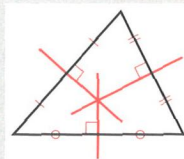
1 三角形の辺の垂直二等分線

定理3 三角形の3辺の垂直二等分線は1点で交わる。

2 外心

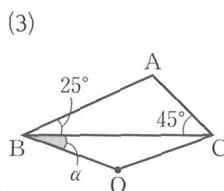
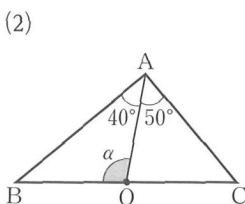
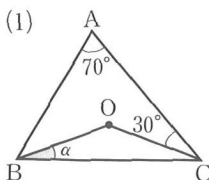
$\triangle ABC$ において、3辺の垂直二等分線が交わる点を O とすると、点 O は $\triangle ABC$ の3つの頂点から等距離にある。よって、この点 O を中心とする半径 OA の円は、 $\triangle ABC$ の3つの頂点を通る。この円を $\triangle ABC$ の外接円といい、外接円の中心 O を $\triangle ABC$ の外心という。

三角形の外心は、3辺の垂直二等分線が交わる点である。



練習 4

下の図において、点 O は $\triangle ABC$ の外心である。 α を求めよ。



教 p.79

指針 外心と角の大きさ 点 O は $\triangle ABC$ の3つの頂点から等距離にある。二等辺三角形の底角は等しいことと、三角形の内角の和が 180° であることから、 α を求める。円周角の定理を使う別解あり。

解答 (1) $OA=OB=OC$ であるから、

$\triangle OAB$, $\triangle OBC$, $\triangle OCA$ はいずれも二等辺三角形である。

$$\angle OAC = \angle OCA = 30^\circ$$

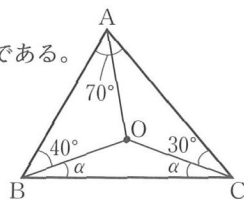
$$\angle OBA = \angle OAB$$

$$= 70^\circ - 30^\circ = 40^\circ$$

$$\angle OCB = \angle OBC = \alpha$$

よって、角の大きさは右の図のようになる。

$\triangle ABC$ において



$$70^\circ + 40^\circ + 2\alpha + 30^\circ = 180^\circ$$

これを解いて $\alpha = 20^\circ$ 答

- (2) $OA = OB$ であるから、
 $\triangle OAB$ は二等辺三角形である。よって
 $\angle OBA = \angle OAB = 40^\circ$

したがって $\alpha = 180^\circ - 2 \times 40^\circ = 100^\circ$ 答

- (3) $OA = OB = OC$ であるから、
 $\triangle OAB$, $\triangle OBC$, $\triangle OCA$ はいずれも
二等辺三角形である。

$$\angle OAB = \angle OBA = \alpha + 25^\circ$$

$$\angle OCB = \angle OBC = \alpha \text{ であるから}$$

$$\angle OAC = \angle OCA = \angle OCB + \angle ACB = \alpha + 45^\circ$$

ゆえに、それぞれの角の大きさは図のようになる。

よって、 $\triangle ABC$ において

$$(\alpha + 25^\circ) + 25^\circ + 45^\circ + (\alpha + 45^\circ) = 180^\circ$$

これを解いて $\alpha = 20^\circ$ 答

別解 円周角の定理を使って、次のように α を求める。

- (1) $\angle BOC = 2\angle BAC = 140^\circ$

$$OB = OC \text{ から } \alpha = (180^\circ - 140^\circ) \div 2 = 20^\circ \text{ 答}$$

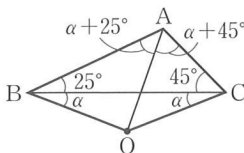
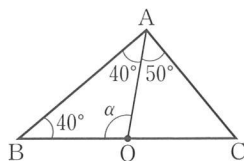
- (2) $OA = OC$ から $\angle OCA = \angle OAC = 50^\circ$

$$\angle AOB = 2\angle ACB \text{ から } \alpha = 2 \times 50^\circ = 100^\circ \text{ 答}$$

- (3) $\angle AOB = 2\angle ACB$, $\angle AOC = 2\angle ABC$ から

$$\angle BOC = \angle AOB + \angle AOC = 2 \times 45^\circ + 2 \times 25^\circ = 140^\circ$$

$$OB = OC \text{ から } \alpha = (180^\circ - 140^\circ) \div 2 = 20^\circ \text{ 答}$$



2 章

図形の性質

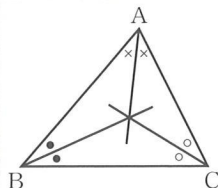
B 三角形の内心

まとめ

1 三角形の内角の二等分線

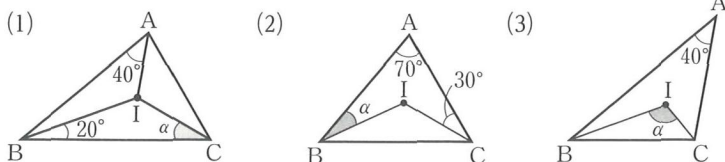
定理4 三角形の3つの内角の二等分線は1点で交わる。

- 2 内心 定理4において、交点をIとし、Iから辺BC, CA, ABにそれぞれ垂線ID, IE, IFを下ろすと点Iを中心とする半径IDの円は、 $\triangle ABC$ の3辺に接する。この円を、 $\triangle ABC$ の内接円といい、内接円の中心Iを $\triangle ABC$ の内心という。三角形の内心は、3つの内角の二等分線が交わる点である。



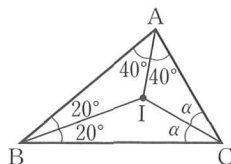
練習
5

下の図において、点Iは $\triangle ABC$ の内心である。 α を求めよ。

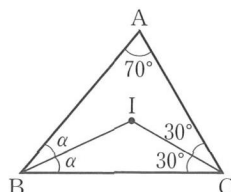


指針 三角形の内心と角度 $\triangle ABC$ の内心Iは、3つの内角の二等分線の交点である。(1), (2)は $\triangle ABC$ の, (3)は $\triangle IBC$ の内角の和が 180° であることから α を求める。

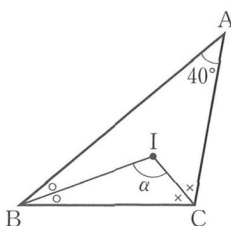
解答 (1) $\angle IAC = \angle IAB = 40^\circ$
 $\angle IBA = \angle IBC = 20^\circ$
 $\angle ICA = \angle ICB = \alpha$
 よって、 $\triangle ABC$ において
 $2(40^\circ + 20^\circ + \alpha) = 180^\circ$
 これを解いて $\alpha = 30^\circ$ 答



(2) $\angle IBC = \angle IBA = \alpha$
 $\angle ICB = \angle ICA = 30^\circ$
 よって、 $\triangle ABC$ において
 $2\alpha + 2 \times 30^\circ + 70^\circ = 180^\circ$
 $2\alpha = 50^\circ$
 したがって $\alpha = 25^\circ$ 答



(3) $\angle ABC + \angle ACB$
 $= 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$
 $\angle IBA = \angle IBC$
 $\angle ICA = \angle ICB$
 であるから
 $\angle IBC + \angle ICB$
 $= \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB)$
 $= \frac{1}{2} \times 140^\circ = 70^\circ$
 よって $\alpha = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$ 答



C 三角形の重心

まとめ

1 中線

三角形の頂点とそれに向かい合う辺の中点を結ぶ線分を、三角形の **中線** という。

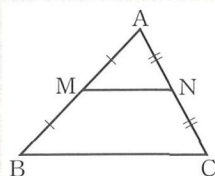
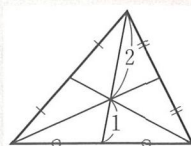
定理5 三角形の3本の中線は1点で交わり、その点は各中線を2:1に内分する。

2 重心

三角形の3本の中線が交わる点を、三角形の **重心** という。

3 中点連結定理

$\triangle ABC$ の辺 AB , AC の中点を、それぞれ M , N とするとき $MN \parallel BC$, $MN = \frac{1}{2}BC$



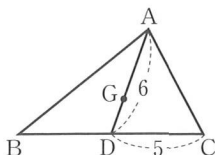
2章

図形の性質

練習 6

右の図において、点 G は $\triangle ABC$ の重心である。次の線分の長さを求めよ。

- (1) BD (2) AG



教 p.82

指針 **三角形の重心と線分の長さ** 定理5から、重心 G は中線を2:1に内分する。このことを利用する。

解答 (1) AD は中線であるから、点 D は辺 BC の中点である。

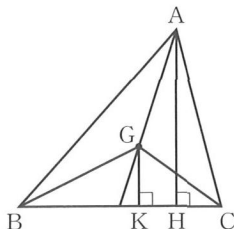
よって $BD = DC = 5$ 答

- (2) 重心 G は AD を2:1に内分するから $AG = \frac{2}{2+1}AD = \frac{2}{3} \times 6 = 4$ 答

練習 7

$\triangle ABC$ の重心を G とし、点 G から直線 BC に下ろした垂線を GK 、点 A から直線 BC に下ろした垂線を AH とする。

- (1) $GK : AH$ を求めよ。
(2) $\triangle GBC$ と $\triangle ABC$ の面積比を求めよ。



教 p.82

指針 重心と線分の比, 底辺の長さが等しい三角形の面積比 定理5から, 重心Gは中線を2:1に内分する。

- (1) $GK \parallel AH$ から, 平行線と線分の比の関係を用いる。
- (2) 底辺が共通な2つの三角形の面積比は高さの比に等しい。

解答 (1) 辺BCの中点をDとする。

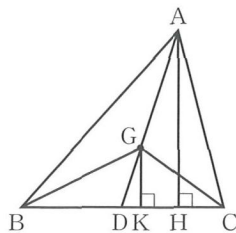
Gは中線を2:1に内分する。

よって $AG:GD=2:1$

$GK \parallel AH$ から, $\triangle ADH$ において,
平行線と線分の比の関係により

$$GK:AH=DG:DA$$

$$=1:(2+1)=1:3 \quad \text{答}$$



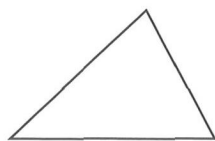
- (2) $\triangle GBC$ と $\triangle ABC$ は底辺BCが共通であるから, 面積比は高さの比に等しい。高さの比は $GK:AH$ であるから, 面積比は $1:3$ 答

注意 $\triangle ABC$ の重心をGとすると, $\triangle GAB$, $\triangle GBC$, $\triangle GCA$ の面積は等しい。

コラム 頂点から向かい合う辺に下ろした垂線

確認

右の図の三角形について, 各頂点から向かい合う辺に垂線を下ろしてみよう。また, 色々な三角形をかいて, 各頂点から向かい合う辺またはその延長に垂線を下ろしてみよう。それらの垂線はどのようなになっているだろうか。



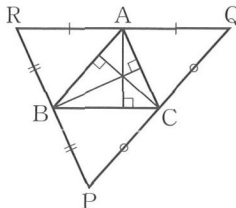
教 p.83

解答 例 3つの頂点から向かい合う辺に下ろした3本の垂線は1点で交わる。

発見

三角形の各頂点から向かい合う辺またはその延長に下ろした垂線が, 辺の垂直二等分線となるような三角形を見つけられないだろうか。上の確認でかいた三角形を使って考えてみよう。

解答 与えられた三角形を図のように $\triangle ABC$ とする。点Aを通り, 直線BCに平行な直線, 点Bを通り, 直線CAに平行な直線, 点Cを通り, 直線ABに平行な直線を引き, 3本の直線の交点を図のように, それぞれP, Q, Rとする。このとき, 四角形ABPC, ABCQは平行四辺



教 p.83

形であるから $AB=PC$, $AB=CQ$

よって $PC=CQ$

したがって、点Cは線分PQの中点である。

同様に、四角形ARBC, ABCQ, ABPCも平行四辺形であることから、点Aは線分QRの中点、点Bは線分RPの中点であることがわかる。

このとき、 $\triangle ABC$ において、点Aから辺BCに下ろした垂線は、線分RQの垂直二等分線である。点Bから辺CAに下ろした垂線、点Cから辺ABに下ろした垂線についても、同じようにそれぞれ辺RP, 辺PQの垂直二等分線である。

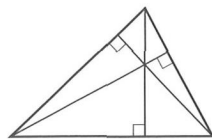
以上から、 $\triangle ABC$ において各頂点から向かい合う辺に下ろした垂線は、 $\triangle PQR$ において、3つの辺の垂直二等分線になっている。 **終**

まとめ

上の確認、発見の結果から考察して、次のことを証明してみよう。

三角形の各頂点から向かい合う辺またはその延長に下ろした垂線は1点で交わる。

教 p.83



解答 発見の $\triangle ABC$, $\triangle PQR$ について、 $\triangle ABC$ において各頂点から向かい合う辺に下ろした垂線は、 $\triangle PQR$ において、3つの辺の垂直二等分線になっている。

したがって、 $\triangle ABC$ において各頂点から向かい合う辺に下ろした垂線は、 $\triangle PQR$ の外心で1点で交わる。 **終**

3 チェバの定理・メネラウスの定理

A チェバの定理

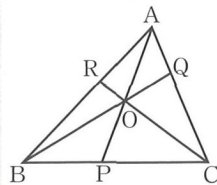
チェバの定理

定理6 $\triangle ABC$ の内部に点Oがある。

頂点A, B, CとOを結ぶ直線が向かい合う辺と、それぞれ点P, Q, Rで交わるとき

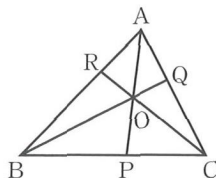
$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

まとめ



練習
8

右の図の $\triangle ABC$ において、
 $AR:RB=1:2$, $BP:PC=4:3$ である。
 $CQ:QA$ を求めよ。



教 p.85

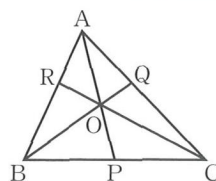
指針 **チェバの定理** AP, BQ, CR が $\triangle ABC$ の内部の点 O で交わっているから、
 チェバの定理が使える。 $\frac{AR}{RB} = \frac{1}{2}$, $\frac{BP}{PC} = \frac{4}{3}$ である。

解答 $\triangle ABC$ において、チェバの定理により $\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$

すなわち $\frac{4}{3} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{1}{2} = 1$ $\frac{CQ}{QA} = \frac{3}{2}$ より $CQ:QA=3:2$ **答**

練習
9

右の図の $\triangle ABC$ において、
 $AQ:QC=2:3$, $BP=PC$ である。
 $AR:RB$ を求めよ。



教 p.85

指針 **チェバの定理** 練習8と同様に AP, BQ, CR が $\triangle ABC$ の内部の点 O で交わっているから、チェバの定理が使える。 $\frac{CQ}{QA} = \frac{3}{2}$, $\frac{BP}{PC} = 1$ である。

解答 $\triangle ABC$ において、チェバの定理により $\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$

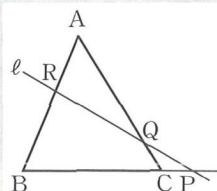
すなわち $\frac{1}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$ $\frac{AR}{RB} = \frac{2}{3}$ より $AR:RB=2:3$ **答**

B メネラウスの定理

メネラウスの定理

定理7 $\triangle ABC$ の辺 BC, CA, AB またはその延長が、三角形の頂点を通らない直線 ℓ と、それぞれ点 P, Q, R で交わるとき

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

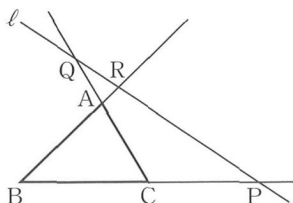
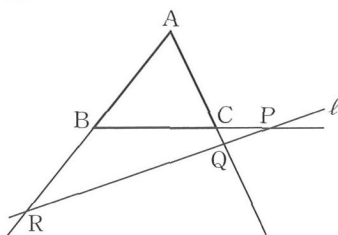


まとめ

定理7における3点P, Q, Rのうち、三角形の辺の延長上にある点の個数は1か3であり、定理7の横の図は1の場合である。3の場合を図示してみよう。

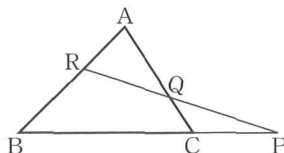
指針 **メネラウスの定理** メネラウスの定理は、次の図のように点P, Q, Rがすべて辺の延長上にある場合にも成り立つ。

解答 答 下の図 (例)


練習
 10

右の図の $\triangle ABC$ において、
 $AR:RB=2:3$, $BC:CP=2:1$
 である。次の比を求めよ。

- (1) $CQ:QA$
- (2) $PQ:QR$



指針 **メネラウスの定理** (1) $\triangle ABC$ の辺やその延長が、1本の直線と、頂点以外で交わっているから、メネラウスの定理が使える。

$BC:CP=2:1$ より、 $BP:PC=3:1$ である。

(2) $\triangle PBR$ と直線 AC についてメネラウスの定理の利用を考える。

解答 (1) $\triangle ABC$ と直線 PR について、メネラウスの定理により

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

$$BP:PC=(2+1):1=3:1 \text{ より } \frac{3}{1} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{2}{3} = 1$$

$$\frac{CQ}{QA} = \frac{1}{2} \text{ より } CQ:QA=1:2 \quad \text{答}$$

(2) $\triangle PBR$ と直線 AC について、メネラウスの定理により

$$\frac{PQ}{QR} \cdot \frac{RA}{AB} \cdot \frac{BC}{CP} = 1$$

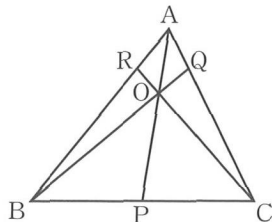
$$\text{すなわち } \frac{PQ}{QR} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{1} = 1 \quad \frac{PQ}{QR} = \frac{5}{4} \text{ より } PQ:QR=5:4 \quad \text{答}$$

練習
11

△ABC の辺 AB, AC を 1 : 3 に内分する点を, それぞれ R, Q とする。線分 BQ と CR の交点を O とし, 直線 AO と辺 BC の交点を P とする。

(1) BP : PC を求めよ。

(2) △OBC : △ABC を求めよ。



指針 チェバの定理・メネラウスの定理

(1) △ABC にチェバの定理を用いる。

(2) △OBC と △ABC は底辺が共通なので, 面積の比は OP : AP になる。

△ABP と直線 RC にメネラウスの定理を用いる。

解答 (1) △ABC にチェバの定理を用いると $\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$

すなわち $\frac{BP}{PC} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{3} = 1$ $\frac{BP}{PC} = 1$ より BP : PC = 1 : 1 答

(2) △ABP と直線 RC にメネラウスの定理を用いると $\frac{BC}{CP} \cdot \frac{PO}{OA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$

(1)より, BC : CP = 2 : 1 であるから $\frac{2}{1} \cdot \frac{PO}{OA} \cdot \frac{1}{3} = 1$

$\frac{PO}{OA} = \frac{3}{2}$ より PO : OA = 3 : 2 よって PO : PA = 3 : (3+2) = 3 : 5

△OBC と △ABC は底辺 BC が共通で, 高さの比は PO : PA に等しい。

したがって, 面積比 △OBC : △ABC は線分比 PO : PA に等しいから

△OBC : △ABC = 3 : 5 答

研究 チェバの定理の逆, メネラウスの定理の逆

まとめ

2章

図形の性質

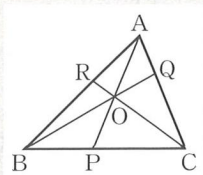
チェバの定理

チェバの定理は, 点Oが△ABCの外部にある場合にも成り立つ。

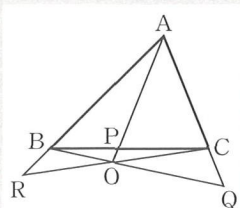
定理6' △ABCの辺上にもその延長上にもない点Oがある。頂点A, B, CとOを結ぶ直線AO, BO, COが, 向かい合う辺BC, CA, ABまたはその延長と, それぞれ点P, Q, Rで交わるとき, 次の等式が成り立つ。

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

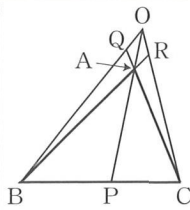
①



②

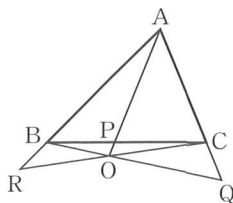


③

練習
1

右の図の△ABCにおいて,
AR : RB = 4 : 1, BP : PC = 3 : 4
である。
CQ : QA を求めよ。

教 p.88



指針 **チェバの定理** 直線AP, BQ, CRが△ABCの辺上にもその延長上にもない点Oで交わっているから, チェバの定理が使える。

$$\frac{BP}{PC} = \frac{3}{4}, \quad \frac{AR}{RB} = \frac{4}{1} \text{ である。}$$

解答 △ABCにチェバの定理を用いると $\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$

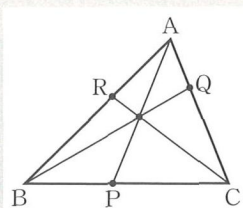
$$\text{すなわち } \frac{3}{4} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{4}{1} = 1 \quad \frac{CQ}{QA} = \frac{1}{3} \text{ より } CQ : QA = 1 : 3 \quad \text{答}$$

1 チェバの定理の逆

△ABC の辺 BC, CA, AB またはその延長上に、それぞれ点 P, Q, R があり、この 3 点のうち、1 個または 3 個が辺上にあるとする。このとき、BQ と CR が交わり、かつ

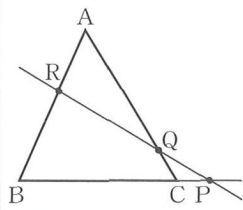
$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$ が成り立てば、3 直線 AP, BQ, CR は 1 点で交わる。

注意 上の「チェバの定理の逆」は、前ページの定理 6' の逆である。



2 メネラウスの定理の逆

△ABC の辺 BC, CA, AB またはその延長上に、それぞれ点 P, Q, R があり、この 3 点のうち、1 個または 3 個が辺の延長上にあるとする。このとき、 $\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$ が成り立てば、3 点 P, Q, R は一直線上にある。

練習
2

チェバの定理の逆を用いて、次のことを証明せよ。

- (1) 三角形の 3 本の中線は 1 点で交わる。
- (2) 三角形の 3 つの内角の二等分線は 1 点で交わる。

指針 チェバの定理の逆 三角形の頂点を A, B, C として、△ABC についてチェバの定理の逆を用いる。

解答 (1) △ABC において、辺 BC, CA, AB の中点を、それぞれ L, M, N とすると $BL=LC$, $CM=MA$, $AN=NB$

$$\text{したがって } \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

よって、チェバの定理の逆により、3 つの中線 AL, BM, CN は 1 点で交わる。終

(2) △ABC において、∠A, ∠B, ∠C の二等分線が辺 BC, CA, AB と交わる点を、それぞれ P, Q, R とすると

$$\frac{BP}{PC} = \frac{AB}{AC}, \quad \frac{CQ}{QA} = \frac{BC}{BA}, \quad \frac{AR}{RB} = \frac{CA}{CB}$$

$$\text{したがって } \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{BA} \cdot \frac{CA}{CB} = 1$$

よって、チェバの定理の逆により、3 つの内角の二等分線 AP, BQ, CR は 1 点で交わる。終

研究 三角形の辺と角

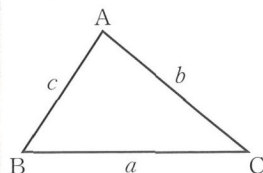
まとめ

2
章

図形の性質

1 三角形の辺と角

$\triangle ABC$ の $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ に向かい合う辺 BC , CA , AB の長さを、それぞれ a , b , c で表す。



2 三角形の辺の大小関係

1つの三角形において

[1] 2辺の長さの和は、他の1辺の長さよりも大きい。

[2] 2辺の長さの差は、他の1辺の長さよりも小さい。

3 三角形が存在するための辺の条件

正の数 a , b , c を3辺の長さとする三角形が存在するための条件は、次の大小関係が成り立つことである。

$$|b-c| < a < b+c \quad \leftarrow |x| \text{ は } x \text{ の絶対値を表す。}$$

練習
1

教 p.90

3 辺の長さが次のような三角形は存在するかどうかを調べよ。

(1) 4, 6, 8

(2) 4, 6, 4

(3) 4, 6, 10

指針 三角形の存在条件 正の数 a , b , c を3辺の長さとする三角形が存在するための必要十分条件 $|b-c| < a < b+c$ により調べる。

a , b , c としてどの値のとり方をしても、1通りだけ調べればよいことに注意する。

解答 (1) $|6-4| < 8 < 6+4$ は成り立つ。

よって、3 辺の長さが 4, 6, 8 である三角形は存在する。答

(2) $|4-4| < 6 < 4+4$ は成り立つ。

よって、3 辺の長さが 4, 6, 4 である三角形は存在する。答

(3) $10 = 6+4$ から、 $|6-4| < 10 < 6+4$ は成り立たない。

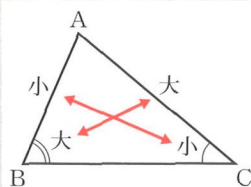
よって、3 辺の長さが 4, 6, 10 である三角形は存在しない。答

注意 3 辺の長さ a , b , c の中で、 a が最大であれば、三角形が存在するための条件は、 $a < b+c$ が成り立つことである。

三角形の辺と角の大小関係

 $\triangle ABC$ において

$$b > c \iff \angle B > \angle C$$

練習
2

教 p.91

次が成り立つことを示せ。

直角三角形では、3 辺のうち斜辺が最大である。

指針 三角形の辺と角の大小関係 直角三角形では、1つの角が直角で、残りの2つの角が鋭角であるから、直角が最大の角である。

解答 三角形の内角の和は 180° である。

直角三角形において、直角以外の2つの角は 90° より小さいから、直角が最大の角である。三角形の辺と角の大小関係により、直角に向かい合う辺(斜辺)が最大の辺である。

よって、直角三角形では、3 辺のうち斜辺が最大である。 終

4 円に内接する四角形

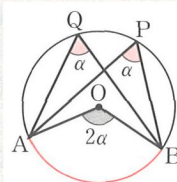
A 円周角の定理

円周角の定理

1つの弧に対する円周角の大きさは一定であり、その弧に対する中心角の大きさの半分である。

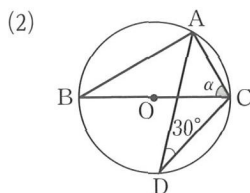
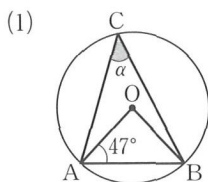
例 右の図の円Oにおいて

$$\angle APB = \angle AQB, \quad \angle APB = \frac{1}{2} \angle AOB$$



練習
12

下の図において、 α を求めよ。ただし、O は円の中心、(2)の線分 BC は円の直径である。

2
章

図形の性質

指針 円周角の定理

- (1) $\triangle OAB$ は二等辺三角形、 $\angle AOB = 2\angle ACB$ より求める。
 (2) 1つの弧に対する円周角の大きさは等しいことと、直径に対する円周角は 90° であることから、 $\triangle ABC$ の内角の和より求める。

解答 (1) 円周角の定理より、 $\angle AOB = 2\alpha$

$\triangle OAB$ は $OA = OB$ の二等辺三角形であるから

$$\angle OBA = \angle OAB = 47^\circ$$

$$\triangle OAB \text{ において } 2\alpha + 47^\circ + 47^\circ = 180^\circ$$

$$\text{これを解いて } \alpha = 43^\circ \quad \text{答}$$

- (2) 円周角の定理より、 $\widehat{AC}$ に対する円周角は等しいから

$$\angle ABC = \angle ADC = 30^\circ$$

$$\text{半円の弧に対する円周角であるから } \angle BAC = 90^\circ$$

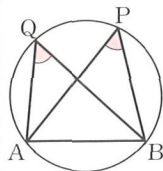
$$\triangle ABC \text{ において } 30^\circ + 90^\circ + \alpha = 180^\circ$$

$$\text{これを解いて } \alpha = 60^\circ \quad \text{答}$$

まとめ

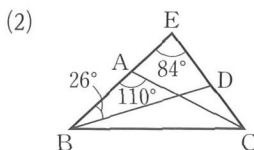
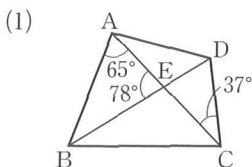
円周角の定理の逆

4点 A, B, P, Q について、点 P, Q が直線 AB に関して同じ側にあつて $\angle APB = \angle AQB$ ならば、4点 A, B, P, Q は1つの円周上にある。



練習
13

下の図において、4点 A, B, C, D が1つの円周上にあることを示せ。



指針 円周角の定理の逆の利用 (1), (2) $\angle ABD = \angle ACD$ を示す。

解答 (1) $\triangle ABE$ において $\angle ABE = 180^\circ - (65^\circ + 78^\circ) = 37^\circ$

よって $\angle ABD = \angle ACD$

したがって、4点 A, B, C, D は1つの円周上にある。終

(2) $\triangle ACE$ において $\angle ACE = 180^\circ - 84^\circ - 110^\circ = 26^\circ$

よって $\angle ABD = \angle ACD$

したがって、4点 A, B, C, D は1つの円周上にある。終

B 円に内接する四角形

まとめ

1 円に内接する多角形

多角形のすべての頂点が1つの円周上にあるとき、この多角形は円に内接するという。また、この円をその多角形の外接円という。

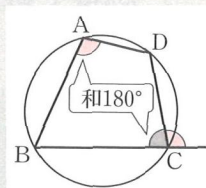
2 円に内接する四角形の性質

定理8 円に内接する四角形について、次の[1], [2]が成り立つ。

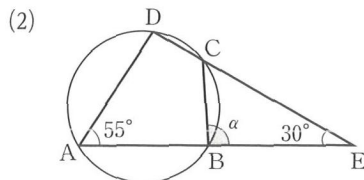
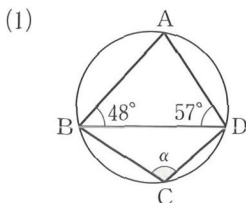
[1] 対角の和は 180° である。

[2] 内角は、その対角の外角に等しい。

注意 四角形において、1つの内角に向かい合う内角をその対角という。

練習
14

下の図において、 α を求めよ。



指針 円に内接する四角形の性質 四角形 ABCD が円に内接するから、定理 8 より、角の大きさを求める。

解答 (1) 四角形 ABCD は円に内接するから

$$\angle BAD + \alpha = 180^\circ \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

← 対角の和は 180°

また、 $\triangle ABD$ の内角の和から

$$\angle BAD + 48^\circ + 57^\circ = 180^\circ \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ から } \alpha = 48^\circ + 57^\circ = 105^\circ \quad \text{答}$$

(2) 四角形 ABCD は円に内接するから

$$\alpha = \angle ADC$$

← 内角は、その対角の外角に等しい。

また、 $\triangle ADE$ の内角の和から

$$\angle ADE + 55^\circ + 30^\circ = 180^\circ$$

$$\text{よって } \alpha = 180^\circ - (55^\circ + 30^\circ) = 95^\circ \quad \text{答}$$

まとめ

四角形が円に内接するための条件

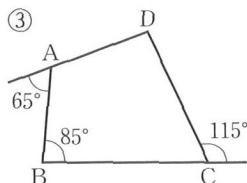
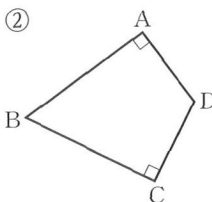
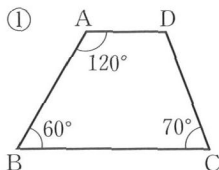
定理 9 次の [1] または [2] が成り立つ四角形は、円に内接する。

[1] 1 組の対角の和が 180° である。

[2] 内角が、その対角の外角に等しい。

練習 15

次の四角形 ABCD のうち、円に内接するものはどれか。



指針 四角形が円に内接するための条件 定理 9 より、1 組の対角の和が 180° になるか、内角がその対角の外角に等しいものを選ぶ。

解答 ① $\angle BAD + \angle BCD = 190^\circ$ から、対角の和は 180° でない。

② $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$ から、対角の和は 180° である。

③ $\angle BCD = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$

よって、内角 $\angle BCD$ が、その対角 $\angle BAD$ の外角に等しい。

以上から、四角形 ABCD が円に内接するものは

②, ③ 答

練習
16

AD//BC である台形 ABCD において、 $\angle ABC = \angle BCD$ であるとき、この台形は円に内接する。このことを証明せよ。

指針 四角形が円に内接するための条件 平行線の同位角と、定理 9 の [2] を使って証明する。

証明 BA の延長線上に点 E をとる。

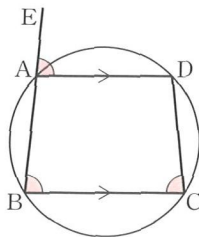
AD//BC であるから

$$\angle EAD = \angle ABC \quad \cdots \cdots ①$$

$$\text{仮定から} \quad \angle ABC = \angle BCD \quad \cdots \cdots ②$$

$$①, ② \text{ から} \quad \angle BCD = \angle EAD$$

よって、内角が、その対角の外角に等しいから、台形 ABCD は円に内接する。 終



5 円と直線

A 円の接線

まとめ

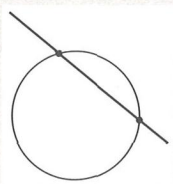
2章

図形の性質

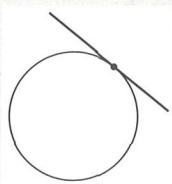
1 円と直線の位置関係

円と直線の位置関係は、次の3つの場合がある。

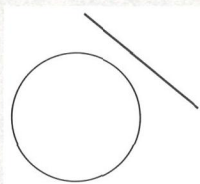
[1] 2点で交わる



[2] 接する



[3] 離れている



2 円の接線

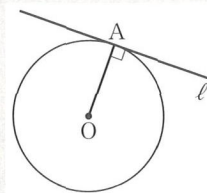
円と直線が接するとき、それらはただ1点を共有する。この直線を円の接線といい、その共有点を接点という。

3 円の接線の性質

円Oの周上の点Aを通る直線 ℓ について

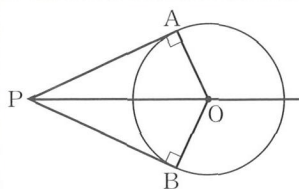
直線 ℓ が点Aで円Oに接する

$$\iff OA \perp \ell$$



4 円の接線の長さ

下の図のように、円Oには外部の点Pから、2つの接線を引くことができる。その接点をA, Bとすると、線分PA, PBの長さを、Pから円Oに引いた接線の長さという。



5 円の接線の長さの性質

円の外部の1点からその円に引いた2つの接線の長さは等しい。

練習
17

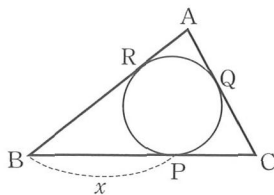
△ABC において,

$$AB=7, BC=8$$

とする。

この三角形の内接円と辺 BC, CA, AB との接点を, それぞれ P, Q, R とするとき, 次の問いに答えよ。

- (1) BP の長さを x とするとき, AQ と CQ の長さを, それぞれ x で表せ。
- (2) CA=5 であるとき, BP の長さを求めよ。



教 p.97

指針 接線の長さ 円の外部の1点からその円に引いた2つの接線の長さが等しいことを利用する。

解答 (1) $BR=BP=x$, $AB=7$ であるから $AR=7-x$

$$AR=AQ \text{ より } AQ=7-x \quad \text{答}$$

$$\text{また, } CQ=CP, CP=8-x \text{ であるから } CQ=8-x \quad \text{答}$$

$$(2) CA=5 \text{ より } (7-x)+(8-x)=5 \quad \text{これを解いて } x=5$$

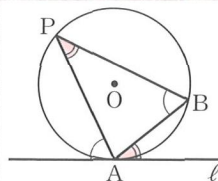
$$\text{よって } BP=5 \quad \text{答}$$

B 円の接線と弦の作る角

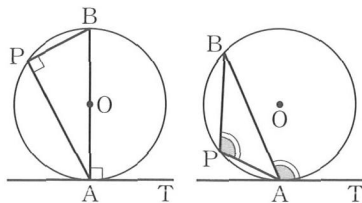
まとめ

円の接線と弦の作る角

定理10 円の接線とその接点を通る弦の作る角は, その角の内部にある弧に対する円周角に等しい。

練習
18

教科書 98 ページの証明において, $\angle BAT$ が直角の場合, 鈍角の場合についても定理 10 が成り立つことを確かめよ。



教 p.98

指針 円の接線と弦の作る角の証明 $\angle BAT$ が直角の場合は、半円に対する円周角は 90° であることを利用する。 $\angle BAT$ が鈍角の場合は、 P を含まない弧 AB 上に点 D をとり、円に内接する四角形の対角の和が 180° であることを利用する。

解答 $\angle BAT$ が直角の場合

AB は直径であるから $\angle APB = 90^\circ$

よって $\angle BAT = \angle APB$ **終**

$\angle BAT$ が鈍角の場合

右の図のように、 TA の延長上に T' をとり、

P を含まない弧 AB 上に点 D をとると、

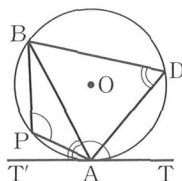
$\angle ADB$ は鋭角で

$$\angle BAT' = \angle ADB$$

$$\angle APB + \angle ADB = 180^\circ$$

$$\angle BAT' + \angle BAT = 180^\circ$$

よって $\angle BAT = \angle APB$ **終**



別解 $\angle BAT$ が鈍角の場合、右の図のように A を通る直径を AD とし、 D と P を結ぶと

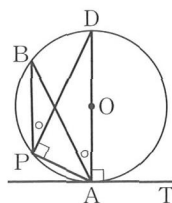
$$\angle BAT = \angle BAD + 90^\circ$$

また、 AD が直径であるから

$$\angle APB = \angle BPD + 90^\circ$$

円周角の定理により $\angle BAD = \angle BPD$

よって $\angle BAT = \angle APB$ **終**

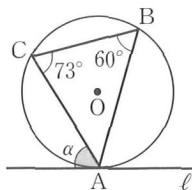


練習 19

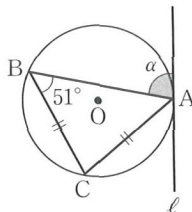
教 p.98

下の図において、 α を求めよ。ただし、直線 ℓ は円 O の接線で、 A は接点である。

(1)



(2)



指針 円の接線と弦の作る角 定理 10 を用いて、角の大きさを求める。

解答 (1) 円の接線と弦の作る角の性質により

$$\alpha = \angle ABC$$

よって $\alpha = 60^\circ$ **答**

(2) $AC=BC$ から $\angle CAB = \angle CBA = 51^\circ$

円の接線と弦の作る角の性質により

$$\alpha = \angle ACB$$

よって $\alpha = 180^\circ - 51^\circ \times 2 = 78^\circ$ **答**

C 方べきの定理

まとめ

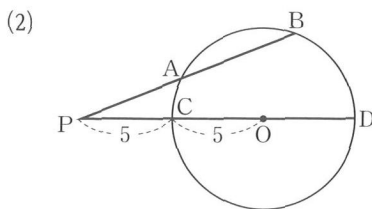
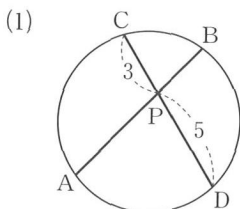
方べきの定理 I

定理11 円の2つの弦 AB, CD の交点、またはそれらの延長の交点を P とすると、 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ が成り立つ。

練習
20

教 p.99

下の図において、 $PA \cdot PB$ の値を求めよ。ただし、(2)の O は円の中心である。



指針 **方べきの定理 I** 円の2つの弦 AB, CD の交点、またはそれらの延長の交点を P とすると、 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ が成り立つ。

すなわち、定点 P を通る直線と円の交点 A, B について、 $PA \cdot PB$ は一定の値をとる。

解答 (1) 方べきの定理 I により

$$\begin{aligned} PA \cdot PB &= PC \cdot PD \\ &= 3 \cdot 5 = 15 \quad \text{答} \end{aligned}$$

(2) 方べきの定理 I により

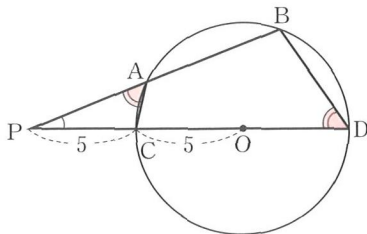
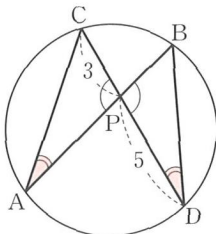
$$\begin{aligned} PA \cdot PB &= PC \cdot PD \\ &= 5 \cdot 15 = 75 \quad \text{答} \end{aligned}$$

注意 方べきの定理 I を使わなくても A と C, B と D を結んで, $\triangle PAC \sim \triangle PDB$ により, 対応する辺の比が等しいことから

$$PA : PD = PC : PB$$

したがって $PA \cdot PB = PC \cdot PD$

となるから, $PA \cdot PB$ の値が求められる。



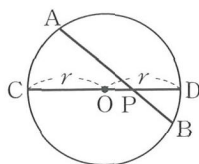
2 章

図形の性質

練習 21

円 O の半径を r とするとき, 右の図において, $PA \cdot PB = r^2 - PO^2$ である。このことを示せ。

教 p.100



指針 方べきの定理における $PA \cdot PB$ の値の意味 方べきの定理 I において, $PC = CO + PO$, $PD = DO - PO$ であることに着目する。

解答 方べきの定理 I により

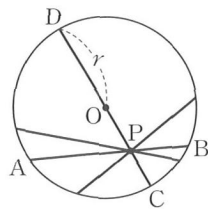
$$\begin{aligned} PA \cdot PB &= PC \cdot PD = (CO + PO)(DO - PO) \\ &= (r + PO)(r - PO) \end{aligned}$$

よって $PA \cdot PB = r^2 - PO^2$ **終**

注意 右の図のように, $PC = CO - PO$, $PD = DO + PO$ の場合も, 同様に $PA \cdot PB = r^2 - PO^2$ となる。
また, 教科書 p.100 例 4 で示したように, 弦 AB, CD の延長の交点を P とすると

$$PA \cdot PB = PO^2 - r^2$$

したがって, 方べきの定理 I における $PA \cdot PB$ の値は, その円の中心を O, 半径を r とすると, A, B の位置に関わらず, $|PO^2 - r^2|$ に等しく, 一定である。

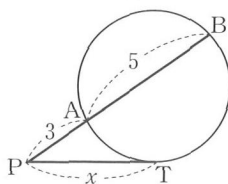


方べきの定理Ⅱ

定理12 円の外部の点Pから円に引いた接線の接点をTとする。
Pを通してこの円と2点A, Bで交わる直線を引くと、
 $PA \cdot PB = PT^2$ が成り立つ。

練習
22

右の図において、 x の値を求めよ。
ただし、直線PTは円の接線で、
Tは接点である。



教 p.101

指針 方べきの定理Ⅱ 接線PTと線分PBに方べきの定理Ⅱを使う。

解答 方べきの定理Ⅱにより

$$PT^2 = PA \cdot PB$$

すなわち $x^2 = 3 \cdot (3 + 5) = 24$

$x > 0$ であるから $x = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ 答

研究 方べきの定理の逆

方べきの定理Ⅰの逆

2つの線分ABとCD, またはABの延長とCDの延長が点Pで交わる時、
 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ が成り立つならば、4点A, B, C, Dは1つの円周上に
ある。

補足 方べきの定理Ⅱについても、その逆である次のことが成り立つ。

一直線上にない3点A, B, Tおよび線分ABの延長上の点Pについ
て、 $PA \cdot PB = PT^2$ が成り立つならば、直線PTは3点A, B, Tを通る
円に接する。

6 2つの円

A 2つの円の位置関係

まとめ

2章

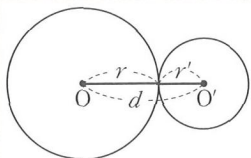
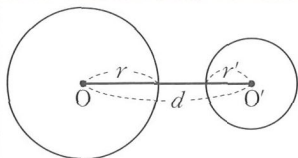
図形の性質

1 2つの円の位置関係

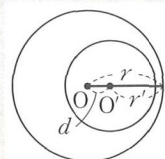
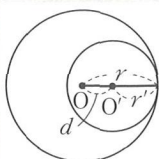
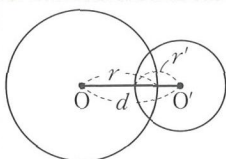
半径が異なる2つの円の位置関係には、次の[1]～[5]の場合がある。
ただし、 $r > r'$ であるとする。

[1] 互いに外部にある

[2] 外接する(1点を共有する)



[3] 2点で交わる

[4] 内接する
(1点を共有する)[5] 一方が他方の
内部にある

2 2つの円の接点

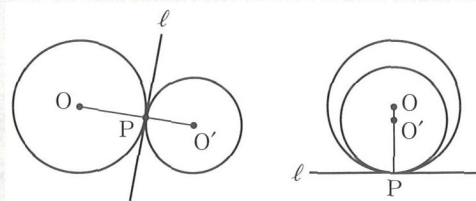
[2], [4]のように、2つの円がただ1つの共有点をもつとき、2つの円は **接する** といい、この共有点を **接点** という。

[2]のように接する場合、2つの円は **外接する** という。

[4]のように接する場合、2つの円は **内接する** という。

3 2つの円の中心と接点

2つの円が接するとき、
接点は2つの円の中心
を通る直線上にある。



注意 2つの円は、2つの円の中心を通る直線に関して対称である。

練習
23

半径 5 と半径 3 の円がある。中心間の距離 d の値が次のとき、2 つの円の位置関係を前ページの [1] ~ [5] の中から選べ。

- (1) $d=8$ (2) $d=10$ (3) $d=2$
(4) $d=4$ (5) $d=1$

指針 2つの円の位置関係 2つの円の半径を r, r' (ただし, $r > r'$), 中心間の距離を d とすると、2つの円の位置関係は

- [1] 互いに外部にある $d > r + r'$
[2] 1点を共有する(外接) $d = r + r'$
[3] 2点で交わる $r - r' < d < r + r'$
[4] 1点を共有する(内接) $d = r - r'$
[5] 一方が他方の内部にある $d < r - r'$
の 5 つの場合がある。



解答 $r=5, r'=3$ とすると $r+r'=8, r-r'=2$

- (1) $d=8$ のとき $d=r+r'$
よって [2] 1点を共有する(外接する) 答

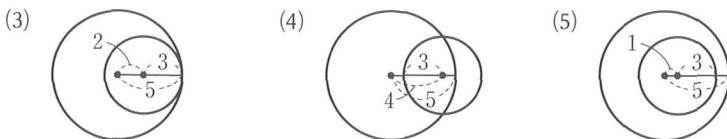
- (2) $d=10$ のとき $d > r+r'$
よって [1] 互いに外部にある 答



- (3) $d=2$ のとき $d=r-r'$
よって [4] 1点を共有する(内接する) 答

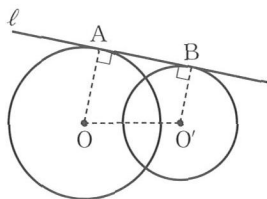
- (4) $d=4$ のとき $r-r' < d < r+r'$
よって [3] 2点で交わる 答

- (5) $d=1$ のとき $d < r-r'$
よって [5] 一方が他方の内部にある 答



練習
25

右の図において、直線 ℓ は2つの円 O , O' の共通接線で、 A , B は接点である。円 O , O' の半径を、それぞれ4, 3とし、 O , O' 間の距離を5とすると、線分 AB の長さを求めよ。



教 p.104

指針 共通外接線の長さ O' から OA に垂線 $O'H$ を下ろすと、四角形 $AHO'B$ は長方形であり、 $\triangle OO'H$ は直角三角形である。
三平方の定理により、 $O'H$ の長さを求める。

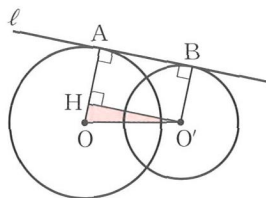
解答 右の図のように、 O' から線分 OA に垂線 $O'H$ を下ろすと、四角形 $AHO'B$ は長方形である。 $\leftarrow$ 4つの角が 90°

$$\begin{aligned} OH &= OA - O'B \\ &= 4 - 3 = 1 \end{aligned}$$

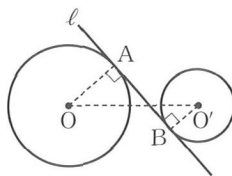
$\triangle OO'H$ は直角三角形であるから

$$O'H^2 = OO'^2 - OH^2$$

$$\text{よって } AB = O'H = \sqrt{5^2 - 1^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \quad \text{答}$$

練習
26

右の図において、直線 ℓ は2つの円 O , O' の共通接線で、 A , B は接点である。円 O の半径を r , 円 O' の半径を r' とし、 O , O' 間の距離を d とするとき、線分 AB の長さを求めよ。



教 p.104

指針 共通内接線の長さ O を通り ℓ に平行な直線と、直線 $O'B$ との交点を C とし、 $\triangle OCO'$ に三平方の定理を用いる。

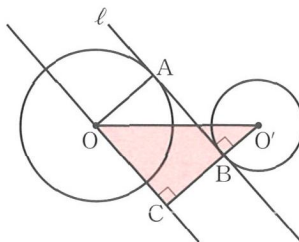
解答 O を通り ℓ に平行な直線を引き、直線 $O'B$ との交点を C とすると、 $\angle OCO' = 90^\circ$ であり、四角形 $AOCB$ は長方形である。

$$O'C = OA + O'B = r + r'$$

$\triangle OCO'$ は直角三角形であるから

$$OC^2 = OO'^2 - O'C^2$$

$$\text{よって } AB = OC = \sqrt{d^2 - (r + r')^2} \quad \text{答}$$



7 作図

A 基本的な作図

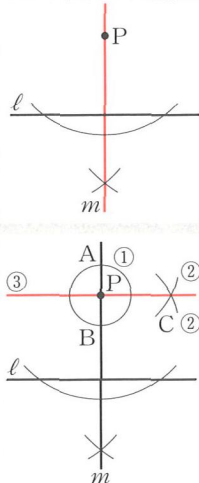
直線 ℓ 上にない点 P を通り、 ℓ に平行な直線の作図

まず、点 P を通る ℓ の垂線 m を作図すると、右の図ようになる。

これに続けて次のように作図する。

- ① 点 P を中心とする円をかき、直線 m との交点をそれぞれ A , B とする。
- ② 2 点 A , B をそれぞれ中心として、等しい半径の円をかき、それらの交点の 1 つを C とする。
- ③ 直線 PC を引く。直線 PC が求める直線である。

点 P を通る ℓ の垂線 m



まとめ

2 章

図形の性質

練習
27

与えられた線分 AB を 1 辺とする
正方形を作図せよ。

A ————— B

教 p.105

指針 正方形の作図 正方形の角はすべて 90° より、垂線の作図を利用する。

解答 ① 点 A を中心とする円をかき、直線 AB との交点をそれぞれ P , Q とする。

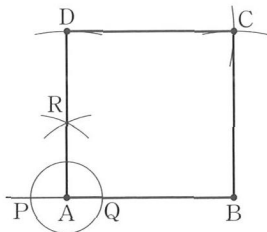
② 2 点 P , Q をそれぞれ中心として、等しい半径の円をかき、それらの交点の 1 つを R とし、直線 AR を引く。

③ 点 A を中心とする半径 AB の円をかき、直線 AR との交点の 1 つを D とする。

④ 2 点 B , D をそれぞれ中心として、半径の長さが AB の円をかき、それらの交点のうち A でない方を C とする。直線 BC , DC を引く。四角形 $ABCD$ が求める正方形である。

このとき、四角形 $ABCD$ において、 $\angle A$ は直角で、4 辺の長さが等しい。

よって、四角形 $ABCD$ は正方形である。終



別解 正方形の作図方法は、他にも次のようなものがある。

- ① 点Aにおける線分ABの垂線 ℓ を引き、 ℓ 上に $AD=AB$ となる点Dをとる。
- ② 点Dにおける線分ADの垂線 m を引き、 m 上に $DC=AB$ となる点Cをとり、BとCを結ぶ。
- ②は、点Bにおける線分ABの垂線 m を引き、 m 上に $BC=AB$ となる点Cをとり、CとDを結んでもよい。

教 p.106

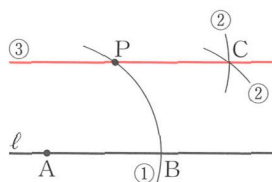
練習
28

教科書 106 ページの上の方法で直線 PC が ℓ と平行になる理由を説明せよ。

指針 作図で得られた直線が平行になる理由

ℓ に平行な直線は次のように作図できる。

- ① ℓ 上に点Aをとり、Aを中心とする半径APの円をかき、 ℓ との交点の1つをBとする。
- ② 2点P、Bをそれぞれ中心として、半径APの円をかき、Aと異なる交点をCとする。
- ③ 直線PCを引く。



解答 教科書の作図（指針の作図）により、四角形ABCPは4辺の長さが等しいから、ひし形である。

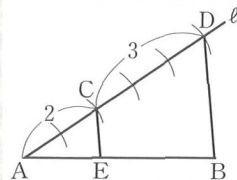
よって、直線PCは直線ABすなわち ℓ と平行になる。 **終**

B 線分の内分点、外分点の作図

まとめ

与えられた線分ABを2:3に内分する点の作図

- 例**
- ① 点Aを通り、直線ABと異なる半直線 ℓ を引く。
 - ② ℓ 上に、 $AC:CD=2:3$ となるように点C、Dをとる。
 - ③ Cを通り、直線BDに平行な直線を引き、線分ABとの交点をEとする。点Eが求める点である。



解説 $BD \parallel EC$ より $AE:EB=AC:CD=2:3$

練習
29

与えられた線分 AB に対して、
次の点を作図せよ。

A B

- (1) 線分 AB を 2 : 1 に内分する点 C
- (2) 線分 AB を 1 : 4 に外分する点 D

2
章

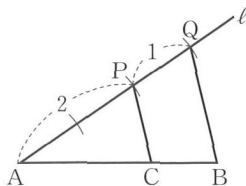
図形の性質

指針 内分点、外分点の作図 (1) $AC : CB = 2 : 1$ である。

- (2) $AD : DB = 1 : 4$ より、点 D は線分 AB を A の側に延長した線上にあり、
 $DA : AB = 1 : 3$ である。

解答 (1) ① 点 A を通り、直線 AB と異なる
半直線 ℓ を引く。

- ② ℓ 上に、 $AP : PQ = 2 : 1$ となる
ように点 P, Q をとる。ただし、
P は線分 AQ 上にとる。



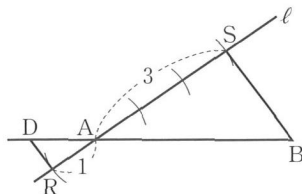
- ③ P を通り、直線 BQ に平行な直

線を引き、線分 AB との交点を C とする。点 C が求める点である。

$BQ \parallel CP$ より $AC : CB = AP : PQ = 2 : 1$ であるから、点 C は線分 AB を
2 : 1 に内分する点である。終

- (2) ① 点 A を通り、直線 AB と異なる
直線 ℓ を引く。

- ② ℓ 上に、 $RA : AS = 1 : 3$ となる
ように点 R, S をとる。ただし、
A が線分 RS 上にあるようにとる。



- ③ R を通り、直線 BS に平行な直

線を引き、直線 AB との交点を D とする。点 D が求める点である。

$BS \parallel DR$ より $AD : DB = AR : RS$ であるから、点 D は線分 AB を 1 : 4 に
外分する点である。終

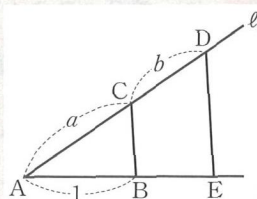
C いろいろな長さの線分の作図

まとめ

長さ1の線分 AB と、長さ a, b の2つの線分が与えられたとき、長さ $\frac{b}{a}$ の線

分の作図

- 例 ① 点Aを通り、直線 AB と異なる半直線 ℓ を引く。
 ② ℓ 上に、 $AC=a$, $CD=b$ となる点 C, D をとる。ただし、C は線分 AD 上にとる。
 ③ D を通り、直線 BC に平行な直線を引き、直線 AB との交点を E とする。線分 BE が求める線分である。



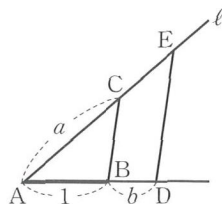
練習
30

教 p.107

長さ1の線分 AB と、長さ a, b の2つの線分が与えられたとき、長さ ab の線分を作図せよ。

指針 指定の長さの線分の作図 $ab=x$ とする。 $1:b=a:x$ となるような平行線を考える。

- 解答 ① 点Aを通り、直線 AB と異なる半直線 ℓ を引く。
 ② ℓ 上に、 $AC=a$ となるように点Cをとる。
 ③ 線分 AB のBを越える延長上に $BD=b$ となるように点Dをとる。
 ④ Dを通り、直線 BC に平行な直線を引き、 ℓ との交点をEとする。線分 CE が求める線分である。

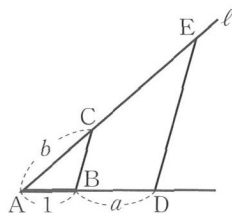


$CE=x$ とすると、 $BC \parallel DE$ から

$$1:b=a:x \text{ すなわち } x=ab$$

よって、線分 CE は長さ ab の線分である。 (終)

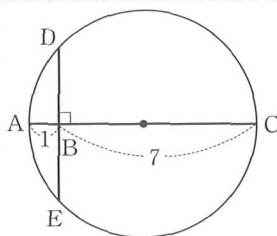
- 別解 ① 点Aを通り、直線 AB と異なる半直線 ℓ を引く。
 ② ℓ 上に、 $AC=b$ となるように点Cをとる。
 ③ 線分 AB のBを越える延長上に $BD=a$ となるように点Dをとる。
 ④ Dを通り、直線 BC に平行な直線を引き、 ℓ との交点をEとする。線分 CE が求める線分である。



長さが無理数で表される線分の作図

例 長さ1の線分が与えられたとき、長さ $\sqrt{7}$ の線分の作図

- ① 直径が $(1+7=)8$ の円をかく。
- ② ①の円の直径をACとしAC上にAB=1となる点Bをとる。
- ③ Bを通りACに垂直な直線を引き、円との交点をD、Eとする。
方べきの定理により、線分BD(BE)が長さ $\sqrt{7}$ の線分である。

練習
31

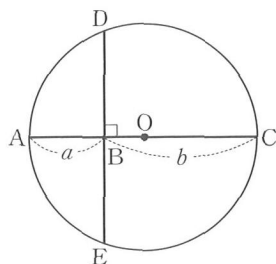
長さ a 、 b の2つの線分が与えられたとき、長さ $\sqrt{ab}$ の線分を作図せよ。

教 p.108



指針 長さが無理数の線分の作図 まとめにおいて、 $AB=a$ 、 $BC=b$ とする。

- 解答
- ① 長さ a の線分をABとし、線分ABのBを越える延長上に $BC=b$ となるように点Cをとる。
 - ② 線分ACの垂直二等分線とACの交点をOとし、Oを中心として半径OAの円をかく。
 - ③ Bを通り、直線ABに垂直な直線を引き、円Oとの交点をD、Eとする。
線分BD(BE)が求める線分である。
このとき、方べきの定理により



$$BA \cdot BC = BD \cdot BE$$

$$AB=a, BC=b, BD=BE \text{ であるから } BD^2=ab$$

よって、線分BDは長さ $\sqrt{ab}$ の線分である。終

研究 正五角形の作図

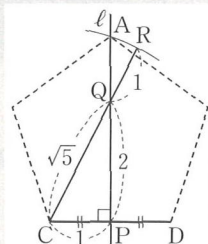
まとめ

正五角形の作図

正五角形では、1 辺の長さと対角線の長さの比が $1 : \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ である。

長さ 2 の線分 CD が与えられたとき、正五角形 ABCDE の対角線 AC の長さが $1+\sqrt{5}$ であることを利用して、頂点 A を次のように作図できる。

- ① 線分 CD の垂直二等分線 ℓ を引き、 ℓ と CD の交点を P とする。
- ② ℓ 上に $PQ=CD$ となるような点 Q をとる。
- ③ 線分 CQ の Q を越える延長上に、 $QR=CP$ となるような点 R をとる。
- ④ C を中心として半径 CR の円をかき、 ℓ との交点を A とする。

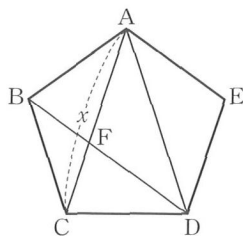


このとき、 $CQ = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ 、 $CA = CR = 1 + \sqrt{5}$ である。

練習
1

正五角形 ABCDE の対角線 AC, BD の交点を F とする。次のことを示せ。

- (1) $\triangle ACD \sim \triangle DFC$
- (2) $CD=1$, $AC=x$ とすると、 x は $x : 1 = 1 : (x-1)$ を満たす。
- (3) $CD : AC = 1 : \frac{1+\sqrt{5}}{2}$



教 p.109

指針 正五角形の 1 辺の長さと対角線の長さの比

- (1) 正五角形は円に内接するから、円周角の定理を利用する。
- (2) $\triangle AFD$, $\triangle DFC$ はともに二等辺三角形であるから、 $FA = FD = CD = 1$

解答 (1) 正五角形は円に内接し、 $CD=BC$ から、円周角の定理により

$$\angle CAD = \angle BDC$$

よって $\angle CAD = \angle FDC$

同様にして、 $\angle CAD$, $\angle ADB$, $\angle ACE$, $\angle ECD$ はすべて等しいから

$$\begin{aligned}\angle DFC &= \angle CAD + \angle ADB \\ &= \angle ACE + \angle ECD \\ &= \angle ACD\end{aligned}$$

$\triangle ACD$ と $\triangle DFC$ において、2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ACD \sim \triangle DFC \quad \text{終}$$

(2) $\triangle AFD$, $\triangle DFC$ はともに二等辺三角形であり

$$FA = FD = CD = 1$$

よって $FC = AC - FA = x - 1$

$\triangle ACD \sim \triangle DFC$ より、 $AC : DF = CD : FC$ であるから

$$x : 1 = 1 : (x - 1) \quad \text{終}$$

(3) $x : 1 = 1 : (x - 1)$ から $x(x - 1) = 1^2$

$$\text{整理して} \quad x^2 - x - 1 = 0$$

$$\text{これを解くと} \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x > 0 \text{ から} \quad x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{よって} \quad CD : AC = 1 : x = 1 : \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{終}$$

参考 比 $1 : \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, すなわち約 $1 : 1.6$ は黄金比といい、人が美しいと感じる比率として知られており、キャッシュカードや名刺の縦横の長さなど身の回りのものに用いられている。

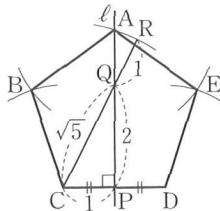
練習 2

前ページのまとめに続けて、正五角形 ABCDE を作図せよ。

指針 正五角形の作図 $AB = CB = 2$, $AE = DE = 2$ であることから、点 B, E を作図する。

解答 ⑤ A を中心として半径 2 の円, C を中心として半径 2 の円をかき、それらの交点のうち AC に関して D と反対側にあるものを B とする。

⑥ A を中心として半径 2 の円, D を中心として半径 2 の円をかき、それらの交点のうち AD に関して C と反対側にあるものを E とする。五角形 ABCDE が求める正五角形である。終



練習
2

3本の平行な直線に対して、それぞれの直線上に頂点がある正三角形を作図せよ。

指針 3本の平行な直線上に頂点がある正三角形の作図

3本の平行な直線を ℓ , m , n として、練習1と同様に正三角形 ABC を考える。点 C を通り AC に垂直な直線と直線 m の交点を C' とすると、正三角形 $AB'C'$ が、3本の平行な直線上に頂点がある正三角形である。

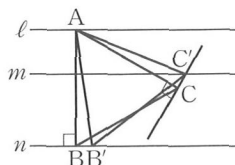
解答 ① 3本の平行な直線を ℓ , m , n とする。

直線 ℓ 上に点 A をとり、 A を通り ℓ に垂直な直線と直線 n の交点を B とする。

② 線分 AB を1辺とする正三角形 ABC をかく。

③ 点 C を通り AC に垂直な直線と直線 m の交点を C' とする。

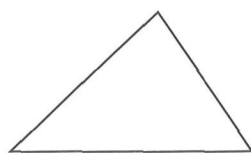
④ 線分 AC' を1辺とする正三角形 $AB'C'$ を、点 B' が直線 n 側にあるようにかく。正三角形 $AB'C'$ が求める正三角形である。終

2
章

図形の性質

練習
3

右の図の三角形に対して、3辺それぞれの辺上に頂点がある正三角形を1つ作図せよ。



指針 三角形の3辺それぞれの辺上に頂点がある正三角形の作図

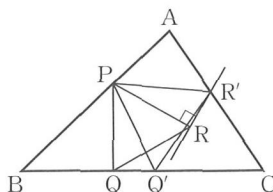
与えられた三角形の3つの頂点を A , B , C として、辺 AB 上に点 P をとり、 P を通り辺 BC に垂直な直線と BC の交点を Q とする。 PQ を1辺とする正三角形 PQR をかき、それをもとにして、 $\triangle ABC$ の3辺それぞれの辺上に頂点がある正三角形 $PQ'R'$ を作図する。

解答 ① 与えられた三角形の3つの頂点を A , B , C とする。辺 AB 上に点 P をとり、 P を通り辺 BC に垂直な直線と BC の交点を Q とする。

② 線分 PQ を1辺とする正三角形 PQR をかく。

③ 点 R を通り PR に垂直な直線と辺 AC の交点を R' とする。

④ 線分 PR' を1辺とする正三角形 $PQ'R'$ を、点 Q' が辺 BC 側にあるようにかく。正三角形 $PQ'R'$ が求める正三角形である。終



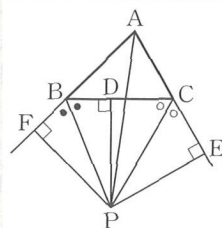
第2章 第1節

問題

教 p.111

- 1 $\triangle ABC$ において、右の図のように $\angle B$ の外角の二等分線と $\angle C$ の外角の二等分線の交点を P とするとき、 P は $\angle A$ の二等分線上にある。このことを証明せよ。

〈注意〉 この P を $\triangle ABC$ の $\angle A$ 内の 傍心 という。



指針 三角形の1つの内角と他の2つの外角の二等分線

点 P が $\angle XOY$ の二等分線 l 上にある

$\iff$ 点 P は 2 辺 OX , OY から等距離にある

解答 点 P から直線 BC , CA , AB にそれぞれ垂線 PD , PE , PF を下ろす。

BP は $\angle DBF$ の二等分線であるから $PF=PD$ ……①

CP は $\angle ECD$ の二等分線であるから $PD=PE$ ……②

①, ②から $PF=PE$

よって、 PA は $\angle EAF$ の二等分線である。

すなわち、 P は $\angle A$ の二等分線上にある。 終

教 p.111

- 2 $\triangle ABC$ の 3 辺 BC , CA , AB 上にそれぞれ点 P , Q , R があり、 AP , BQ , CR が 1 点で交わっているとする。 QR と BC が平行でないとき、直線 QR と直線 BC の交点を S とすると、 $BP:BS=CP:CS$ が成り立つことを示せ。

指針 チェバの定理・メネラウスの定理による証明

$\triangle ABC$ にチェバの定理、 $\triangle ABC$ と直線 QS にメネラウスの定理を用いる。

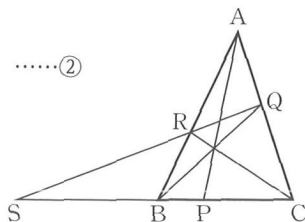
解答 $\triangle ABC$ において、チェバの定理により $\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$ ……①

また、 $\triangle ABC$ と直線 QS において、

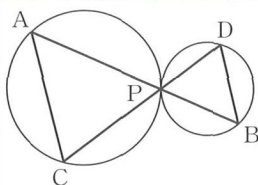
メネラウスの定理により $\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BS}{SC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$ ……②

①, ②から $\frac{BP}{PC} = \frac{BS}{SC}$

よって $BP:BS=CP:CS$ 終



- 3 点Pで外接する2つの円がある。Pを通る2本の直線が、右の図のように、2つの円とそれぞれA、BおよびC、Dで交わるとき、 $AC \parallel DB$ であることを証明せよ。



指針 円の接線と弦の作る角による証明 点Pを通る、2つの円の共通接線を引いて、円の接線と弦の作る角の性質を利用する。

解答 右の図のように、点Pにおける共通接線EFを引く。

円の接線と弦の作る角の性質により、

弦APについて $\angle ACP = \angle APE$

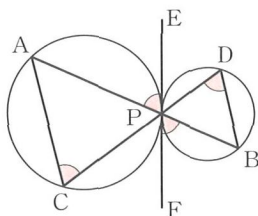
弦BPについて $\angle BDP = \angle BPF$

対頂角は等しいから

$$\angle APE = \angle BPF$$

よって $\angle ACP = \angle BDP$

錯角が等しいから $AC \parallel DB$ **終**



- 4 長さ1の線分ABと、長さ a の線分が与えられたとき、長さ a^2 の線分を作図せよ。

指針 長さ a^2 の線分の作図 長さ1の線分ABと、長さ a の線分が与えられたとき、長さ a^2 の線分の作図であるから、 $1:a=a:x$ の関係を利用して、直線AB上に $1:a$ となる点を取り、直線ABとは異なる直線 ℓ 上に $a:x$ となる点をとる。

解答 ① 点Aを通り、直線ABと異なる半直線 ℓ を引く。

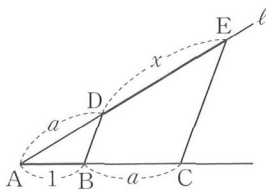
② 直線AB上に $BC=a$ となるように点Cをとり、 ℓ 上に $AD=a$ となるように点Dをとる。

③ Cを通り、直線BDに平行な直線を引き、 ℓ との交点をEとする。線分DEが求める線分である。

$DE=x$ とすると、 $BD \parallel CE$ であるから

$$1:a=a:x \quad \text{よって} \quad x=a^2$$

したがって、線分DEは長さ a^2 の線分である。 **終**



- 5 $AB=4$, $BC=5$, $CA=3$ である $\triangle ABC$ の内心を I , 直線 AI と辺 BC の交点を D とする。次の問いに答えよ。

- (1) $AI : ID$ を求めよ。
 (2) 直線 AI と $\triangle ABC$ の外接円の交点のうち、 A と異なる方を E とするとき、 $AD \cdot DE$ の値を求めよ。

指針 三角形の内心の性質、方べきの定理の利用

- (1) 三角形の内心は 3 つの内角の二等分線の交点であることを利用して、線分の比を求める。
 (2) AE , BC は円の弦であることから、方べきの定理を利用する。

解答 (1) AD は $\angle A$ の二等分線であるから

$$\begin{aligned} BD : DC &= AB : AC \\ &= 4 : 3 \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} BD &= \frac{4}{4+3} BC = \frac{4}{7} \times 5 \\ &= \frac{20}{7} \end{aligned}$$

BI は $\angle B$ の二等分線であるから

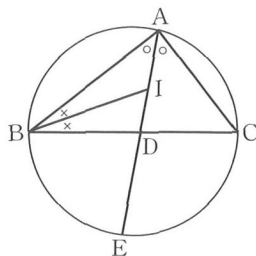
$$AI : ID = BA : BD = 4 : \frac{20}{7} = 7 : 5 \quad \text{答}$$

- (2) (1)より、 $BD = \frac{20}{7}$ であるから

$$DC = 5 - \frac{20}{7} = \frac{15}{7}$$

方べきの定理により

$$AD \cdot DE = BD \cdot DC = \frac{20}{7} \cdot \frac{15}{7} = \frac{300}{49} \quad \text{答}$$



第2節 空間図形

8 直線と平面

A 2直線の位置関係

まとめ

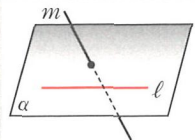
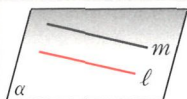
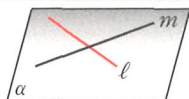
2章

図形の性質

1 2直線の位置関係

異なる2直線 l , m の位置関係には、次の3つの場合がある。[1], [2]の場合、2直線 l , m は1つの平面上にある。

[1] 1点で交わる [2] 平行である [3] ねじれの位置にある

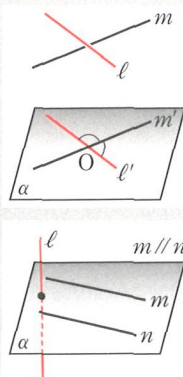
2直線 l , m が平行であるとき、 $l \parallel m$ と書く。3直線 l , m , n について、 $l \parallel m$, $m \parallel n$ ならば $l \parallel n$

2 2直線のなす角

2直線 l , m が平行でないとき、1点 O を通り、 l , m に平行な直線を、それぞれ l' , m' とすると、 l' と m' は1つの平面上にある。このとき、 l' と m' のなす2つの角は、点 O をどこにとっても一定である。この角を 2直線 l , m のなす角 という。2直線 l , m のなす角が直角のとき、 l と m は 垂直 であるといい、 $l \perp m$ と書く。垂直な2直線 l と m が交わる時、 l と m は 直交する という。

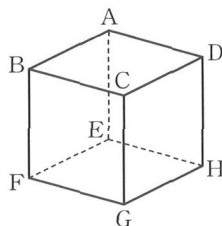
また、次のことが成り立つ。

平行な2直線的一方に垂直な直線は、他方にも垂直である。

練習
32

右の図の立方体 $ABCD-EFGH$ について、次の2直線のなす角 θ を求めよ。
ただし、 $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ とする。

- (1) AB , DH
- (2) AB , EG
- (3) AC , FH



教 p.113

指針 空間内の直線のなす角 2つの直線が共通な点を通るように、一方の直線を平行移動させて考える。

解答 (1) $DH \parallel AE$ である。

求める角は、直線 AB と直線 AE のなす角に等しい。 **答** 90°

(2) $EG \parallel AC$ である。

求める角は、直線 AB と直線 AC のなす角に等しい。 **答** 45°

(3) $FH \parallel BD$ である。

求める角は、直線 AC と直線 BD のなす角に等しい。 **答** 90°

教 p.113

深める

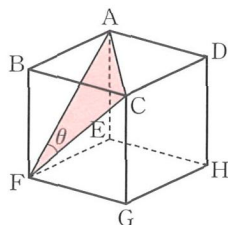
教科書の練習 32 の立方体において、2 直線 AF , CF のなす角 θ を求めよう。ただし、 $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ とする。

指針 2 直線のなす角 $\triangle ACF$ に着目する。

解答 $AF=CF=AC$ であるから、 $\triangle ACF$ は正三角形である。

したがって、2 直線 AF , CF のなす角 θ は

$\theta=60^\circ$ **答**



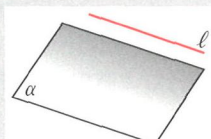
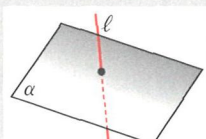
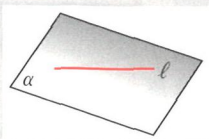
B 直線と平面の位置関係

まとめ

1 直線と平面の位置関係

直線 l と平面 α の位置関係には、次の 3 つの場合がある。

- [1] l は α に含まれる [2] 1 点で交わる [3] 平行である
(l は α 上にある)

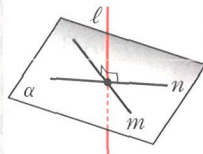
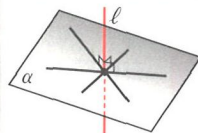


直線 l と平面 α が平行であるとき、 $l \parallel \alpha$ と書く。

2 垂直(直線と平面)

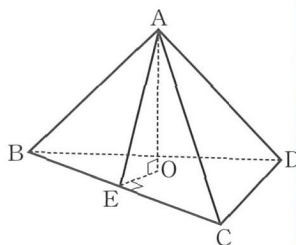
直線 l が、平面 α 上のすべての直線に垂直であるとき、 l は α に垂直である、または l は α に直交するといい、 $l \perp \alpha$ と書く。このとき、 l を平面 α の垂線という。

直線 l が、平面 α 上の交わる 2 直線 m , n に垂直ならば、直線 l は平面 α に垂直である。



練習
33

四面体 ABCD において、点 A から平面 BCD に下ろした垂線を AO とする。また、点 O から直線 BC に下ろした垂線を OE とする。このとき、 $AE \perp BC$ であることを証明せよ。



教 p.114

2 章

図形の性質

指針 直線と平面の位置関係 まず辺 BC が平面 AEO に垂直であることを示す。

解答 直線 AO は平面 BCD に垂直であり、辺 BC は平面 BCD 上にあるから
 $AO \perp BC$

また、 $OE \perp BC$ であるから、BC は平面 AEO に垂直である。

AE は平面 AEO 上にあるから $AE \perp BC$ 終

C 2 平面の位置関係

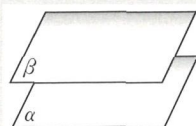
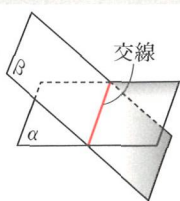
まとめ

1 2 平面の位置関係

異なる 2 平面 α , β の位置関係には、次の 2 つの場合がある。

[1] 交わる

[2] 平行である



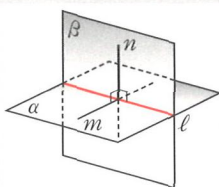
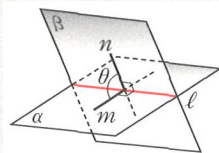
2 平面が交わる時、その交わりは直線になり、その直線を 交線 という。2 平面 α , β が平行であるとき、 $\alpha \parallel \beta$ と書く。

2 2 平面のなす角

交わる 2 平面の交線上の点から、各平面上で、交線に垂直に引いた 2 直線のなす角を 2 平面のなす角 という。

2 平面 α , β のなす角が直角のとき、 α と β は 垂直 である、または 直交 するといい、 $\alpha \perp \beta$ と書く。2 平面の垂直について、次のことが成り立つ。

平面 α に垂直な直線を含む平面は、 α に垂直である。



練習
34

空間内の直線 ℓ と平面 α , β , γ について, 次の記述は正しいか。

正しくない場合, その理由も述べよ。

(1) $\alpha \perp \beta$, $\beta \perp \gamma$ ならば, $\alpha \parallel \gamma$ である。

(2) $\alpha \perp \beta$, $\beta \parallel \gamma$ ならば, $\alpha \perp \gamma$ である。

(3) $\ell \parallel \alpha$, $\ell \parallel \beta$ ならば, $\alpha \parallel \beta$ である。

指針 直線と平面の位置関係 図をかいてみるとわかりやすい。

解答 (1) 正しくない。

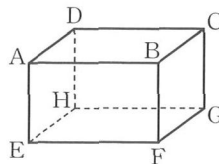
右の図の直方体

ABCD-EFGH において,

(面 ABCD) $\perp$ (面 AEFB),

(面 AEFB) $\perp$ (面 BFGC)

であるが, 面 ABCD と面 BFGC は平行でない。答



(2) 正しい。答

(3) 正しくない。

(1)の直方体において,

$AB \parallel$ (面 EFGH), $AB \parallel$ (面 DHGC)

であるが, 面 EFGH と面 DHGC は平行でない。答

9 空間図形と多面体

A 多面体

まとめ

2章

図形の性質

1 正多面体

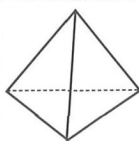
三角錐，四角柱などのように，多角形の面で囲まれた立体を 多面体 といい，へこみのない多面体を 凸多面体 という。

次の[1]，[2]を満たす凸多面体を 正多面体 という。

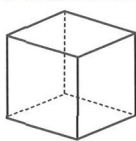
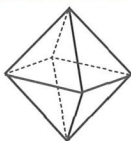
[1] 各面はすべて合同な正多角形である。

[2] 各頂点に集まる面の数はすべて等しい。

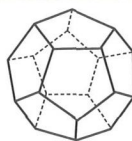
正多面体は，次の5種類しかないことが知られている。



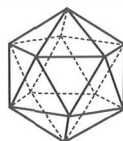
正四面体

正六面体
(立方体)

正八面体



正十二面体



正二十面体

2 正多面体の面の数，頂点の数，辺の数

頂点の数 (面の数) $\times$ (1つの面の頂点の数) $\div$ (1つの頂点に集まる面の数)

辺の数 (面の数) $\times$ (1つの面の辺の数) $\div 2$

練習
35

教 p.117

上の5種類の正多面体について，次の表を完成させよ。

正多面体	面の数	面の形	頂点の数	辺の数
正四面体				
正六面体				
正八面体	8	正三角形	6	12
正十二面体				
正二十面体				

指針 正多面体の性質 まとめにある式に値を代入して求める。

解答 正四面体の1つの頂点には，正三角形が3つ集まっているから，

頂点の数は $4 \times 3 \div 3 = 4$ 辺の数は $4 \times 3 \div 2 = 6$

正六面体の1つの頂点には，正方形が3つ集まっているから，

頂点の数は $6 \times 4 \div 3 = 8$ 辺の数は $6 \times 4 \div 2 = 12$

正十二面体の1つの頂点には、正五角形が3つ集まっているから、

頂点の数は $12 \times 5 \div 3 = 20$ 辺の数は $12 \times 5 \div 2 = 30$

正二十面体の1つの頂点には、正三角形が5つ集まっているから、

頂点の数は $20 \times 3 \div 5 = 12$ 辺の数は $20 \times 3 \div 2 = 30$

正多面体	面の数	面の形	頂点の数	辺の数
正四面体	4	正三角形	4	6
正六面体	6	正方形	8	12
正八面体	8	正三角形	6	12
正十二面体	12	正五角形	20	30
正二十面体	20	正三角形	12	30

答

B オイラーの多面体定理

まとめ

オイラーの多面体定理

凸多面体の頂点の数を v 、辺の数を e 、面の数を f とすると

$$v - e + f = 2$$

が成り立つことが知られている。これを オイラーの多面体定理 という。

練習
36

教 p.117

教科書の練習 35 の表で、等式 $v - e + f = 2$ が成り立つことを確かめよ。

指針 オイラーの多面体定理 正多面体について、練習 35 の表を利用して、
(頂点の数) - (辺の数) + (面の数) = 2 であることを確かめる。

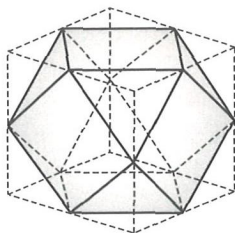
解答 正四面体 $4 - 6 + 4 = 2$ 正六面体 $8 - 12 + 6 = 2$
 正八面体 $6 - 12 + 8 = 2$ 正十二面体 $20 - 30 + 12 = 2$
 正二十面体 $12 - 30 + 20 = 2$

よって、5種類の正多面体について、いずれも $v - e + f = 2$ が成り立つ。終

練習
37

右の図のように、正六面体の各辺の中点を通る平面で8つのかどを切り取った多面体について、次の問いに答えよ。

- (1) 面の数、頂点の数、辺の数を、それぞれ求めよ。
- (2) この多面体についても、等式 $v-e+f=2$ が成り立つことを確かめよ。



教 p.117

2
章

図形の性質

指針 多面体の性質 多面体は、四角形が6つ、三角形が8つでできている。

解答 (1) 面の数は $6+8=14$ **答**

1つの頂点に4つの面が集まっているから、求める頂点の数は

$$(6 \times 4 + 8 \times 3) \div 4 = 12 \quad \text{答}$$

1つの辺に2つの面が集まっているから、求める辺の数は

$$(6 \times 4 + 8 \times 3) \div 2 = 24 \quad \text{答}$$

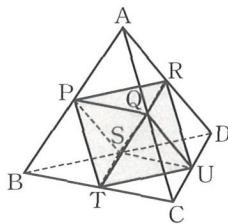
- (2) $v=12$, $e=24$, $f=14$ だから、 $v-e+f=12-24+14=2$

よって、等式 $v-e+f=2$ が成り立つ。 **終**

C 正多面体から切り取った立体

練習
38

正四面体 ABCD の各辺の中点を、右の図のように、P, Q, R, S, T, U とする。この正四面体を4つの平面 PQR, RSU, PST, QTU で切る。新しくできた立体 PQRSTU が正八面体であることを示せ。



教 p.118

指針 正四面体から切り取った立体 すべての面が合同な正三角形で、6つの頂点に集まる正三角形の数がすべて4で等しいことを示す。

解答 [1] 立体 PQRSTU の面 PQR について、P, Q, R はそれぞれ辺 AB, AC, AD の中点であるから、中点連結定理により

$$PQ = \frac{1}{2}BC, \quad QR = \frac{1}{2}CD, \quad RP = \frac{1}{2}DB$$

$BC=CD=DB$ であるから $PQ=QR=RP$

よって、 $\triangle PQR$ は正三角形である。

同様に考えると、立体 PQRSTU のすべての面は合同な正三角形である。

- [2] 6つの頂点に集まる正三角形の数はすべて4で等しい。

[1], [2] から、立体 PQRSTU は正八面体である。 **終**

研究 正多面体の体積

まとめ

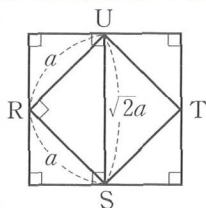
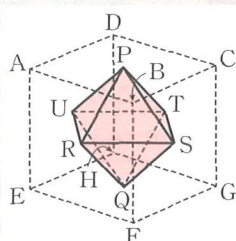
正八面体の体積

正六面体 ABCD-EFGH から切り取った正八面体 PRSTUQ を利用して、正八面体の体積を求める。

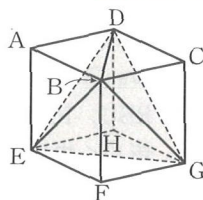
正八面体 PRSTUQ の 1 辺の長さを a とする。
平面 RSTU で正六面体を切ったときの断面は、右下の図ようになる。四角形 RSTU は、1 辺の長さが a の正方形であるから、正六面体の 1 辺の長さは $\sqrt{2}a$ である。

また、正四角錐 PRSTU, QRSTU の高さはともに正六面体の 1 辺の長さの半分である。したがって、1 辺の長さが a の正八面体の体積 V は

$$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{\sqrt{2}a}{2} \times 2 = \frac{\sqrt{2}}{3} a^3$$

練習
1

右の図のように、正六面体 ABCD-EFGH を 4 つの平面 BDE, BEG, BGD, DEG で切ると、正四面体 BDEG ができる。このことを利用して、1 辺の長さが a の正四面体の体積 V を求めよ。



教 p.119

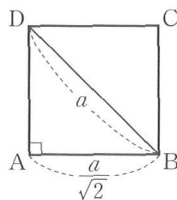
指針 正多面体の体積 正四面体は、正六面体から合同な 4 つの三角錐を切り取った立体であることを利用する。

解答 正四面体 BDEG の 1 辺の長さを a とすると、正六面体 ABCD-EFGH の 1 辺の長さは $\frac{a}{\sqrt{2}}$ である。

正四面体 BDEG の体積は、正六面体 ABCD-EFGH の体積から 4 つの三角錐 ABDE, FBEG, CBGD, HDEG の体積を引いた値である。

よって、求める正四面体の体積 V は

$$V = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^3 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \times 4 = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3 \quad \text{答}$$



研究 正多面体の種類

まとめ

2章

図形の性質

正多面体が存在するための条件

正多面体が存在するためには、次のことが必要である。

[1] 1つの頂点に集まる面の数が3以上である。

[2] 1つの頂点に集まる角の大きさの和は 360° より小さい。

このことから、正多面体の面になることのできる正多角形は、正三角形、正方形、正五角形の3通りしかないことがわかる。

【参考】 まとめの [1], [2] より、正多面体の各面が正方形のとき、1つの頂点に集まる面の数は3であり、正多面体の各面が正三角形のとき、1つの頂点に集まる面の数は3, 4, 5のいずれかである。

正多面体の頂点の数を v 、辺の数を e 、面の数を f とすると

$$v = f \times (1 \text{ つの面の頂点の数}) \div (1 \text{ つの頂点に集まる面の数}) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$e = f \times (1 \text{ つの面の辺の数}) \div 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

より、 v 、 e は f を用いた式で表せる。

$$\text{オイラーの多面体定理により} \quad v - e + f = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

①、②を③に代入すると、 f についての方程式を作ることができる。

コラム 算額

教 p.121

練習

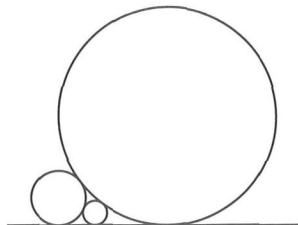
身近にある寺や神社で算額が奉納されているところがあるか探してみよう。その算額に書いてある問題はどのような問題だろうか。

【指針】 算額 現在発見されている算額は関東地方から東北地方に多い。

【解答】 例 東京都の渋谷にある金王八幡宮に奉納されている算額。

問題 図のように、大中小の3つの円がそれぞれ外接し、1本の直線にそれぞれ接している。中円の半径が9、小円の半径が4であるとき、大円の半径を求めよ。

【答】 36



第2章 第2節

問題

教 p.122

- 6 空間内の直線 l , m , n や、平面 α , β について、次の記述は正しいか。正しくない場合、その理由も述べよ。

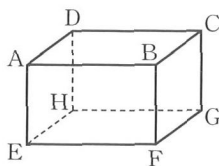
- (1) $l \parallel m$ で、 m と n が交わるならば、 l と n は交わる。
- (2) $l \perp \alpha$, $m \perp \alpha$ ならば、 $l \parallel m$ である。
- (3) l が α 上にあるとき、 $l \perp \beta$ ならば、 $\alpha \perp \beta$ である。

指針 直線と平面の位置関係

直方体の辺や面で考えるとわかりやすい。

解答 (1) 正しくない。

右の図の直方体 ABCD-EFGH において、
 $AB \parallel DC$ で、直線 DC と直線 GC は交わるが、
 直線 AB と直線 GC はねじれの位置にあり、交
 わらない。答



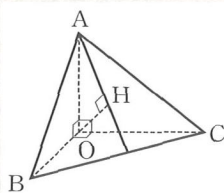
(2) 正しい。答

(3) 正しい。答

教 p.122

- 7 右の図において、3つの線分 OA, OB, OC は、それぞれ直角に交わっている。O から平面 ABC に下ろした垂線を OH とするとき、次のことを示せ。

- (1) $OA \perp BC$, $OH \perp BC$
- (2) $AH \perp BC$



指針 直線と平面の位置関係の利用

- (1) OA, OH が辺 BC を含む面に垂直であることを示す。
- (2) BC が AH を含む面に垂直であることを示す。

解答 (1) $OA \perp OB$, $OA \perp OC$ より、OA は平面 OBC に垂直であるから

$$OA \perp BC$$

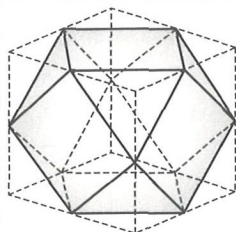
また、OH は平面 ABC に垂直であるから

$$OH \perp BC \quad \text{終}$$

- (2) (1)より、 $OA \perp BC$, $OH \perp BC$ であるから、BC は平面 AOH に垂直である。

$$\text{よって} \quad AH \perp BC \quad \text{終}$$

- 8 右の図の立体は、1辺の長さが2の立方体から各辺の中点を通る平面で8つのかどを切り取った多面体である。この多面体の表面積、体積を求めよ。



指針 立方体を切断してできた立体 切り取った多面体は正方形が6個、正三角形が8個できていて、いずれも1辺の長さは $\sqrt{2}$ である。求める体積は、立方体の体積から、切り取ったかどの部分の体積を引けばよい。

解答 右の図のようにA～Gを定める。

$\triangle EAD$ は $EA=ED=1$ の直角二等辺三角形であるから $AD=\sqrt{2}$

よって、正方形 ABCD の面積は

$$\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$$

$\triangle GAB$ は正三角形であるから、G から AB に垂線 GH を下ろすと

$$GH = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

よって、 $\triangle GAB$ の面積は

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

できた多面体は、正方形 ABCD と合同な正方形が6個、 $\triangle GAB$ と合同な三角形が8個できているから、求める表面積は

$$2 \times 6 + \frac{\sqrt{3}}{2} \times 8 = 12 + 4\sqrt{3} \quad \text{答}$$

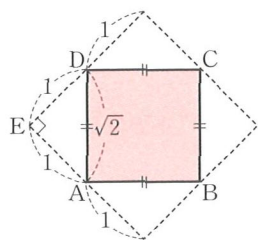
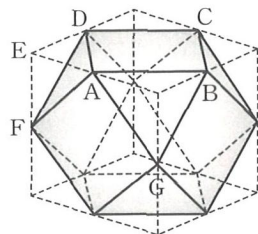
もとの立方体の体積は $2 \times 2 \times 2 = 8$

三角錐 F-ADE の体積は

$$\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 1 \times 1 \right) \times 1 = \frac{1}{6}$$

三角錐 F-ADE と合同な三角錐を8個切り取るから、求める体積は

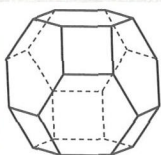
$$8 - \frac{1}{6} \times 8 = \frac{20}{3} \quad \text{答}$$



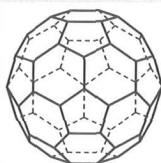
- 9 正二十面体の1つの頂点に集まる5つの辺の中点は同じ平面上にある。正二十面体から1つの頂点に集まる5つの辺の中点を通る平面ですべてのかどを切り取った多面体Pについて、次の問いに答えよ。

(1) Pはどのような多面体か。次の①～③から選べ。

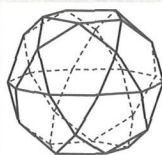
①



②



③

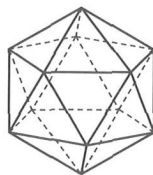


- (2) Pの面の数 f 、辺の数 e 、頂点の数 v を、それぞれ求めよ。

指針 オイラーの多面体定理

- (1) 正二十面体は1つの頂点に集まる辺は5つあるから、その切り口は正五角形になる。
 (2) 頂点の数 v は、オイラーの多面体定理を用いて求める。

解答 (1) 正二十面体の1つの頂点に集まる辺は5つあるから、その切り口は正五角形になる。
 また、もとの正三角形の面は、かどが切り取られることにより、また正三角形となる。
 したがって、多面体Pは正五角形と正三角形の面で作られる多面体であるから ③ 答



- (2) 正二十面体の12個の頂点の分だけ面が増えるから、多面体Pの面の数は

$$f = 20 + 12 = 32 \quad \text{答}$$

多面体Pの辺の数は、12個の正五角形の辺の数に等しいから

$$e = 5 \times 12 = 60 \quad \text{答}$$

頂点の数は、オイラーの多面体定理から

$$v = 2 + e - f = 2 + 60 - 32 = 30 \quad \text{答}$$

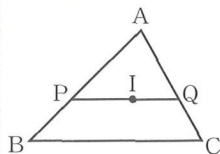
第2章 章末問題 A

教 p.123

2章

図形の性質

1. $\triangle ABC$ の内心 I を通り、辺 BC に平行な直線と辺 AB , AC の交点を、それぞれ P , Q とするとき、 $PQ=PB+QC$ であることを証明せよ。



指針 三角形の内心と線分の長さ $\triangle ABC$ の内心 I は、 $\angle B$, $\angle C$ の二等分線の交点である。 $PQ \parallel BC$ から、 $\triangle PBI$, $\triangle QIC$ はともに二等辺三角形となる。

解答 点 I は $\triangle ABC$ の内心であるから $\angle PBI = \angle CBI$

また、 $PQ \parallel BC$ から $\angle PIB = \angle CBI$

よって $\angle PBI = \angle PIB$

したがって $PB = PI$ ……①

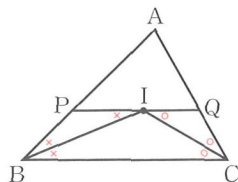
同様に、点 I は $\triangle ABC$ の内心である

から $\angle QCI = \angle BCI$

$PQ \parallel BC$ から $\angle QIC = \angle BCI$ よって $\angle QCI = \angle QIC$

したがって $QC = QI$ ……②

①, ②から $PB + QC = PI + QI$ よって $PQ = PB + QC$ 終



教 p.123

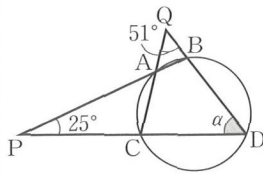
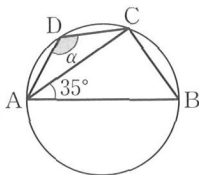
2. 右の図において、

(1)

(2)

α を求めよ。

ただし、(1)で線分 AB は円の直径とする。



指針 円に内接する四角形と角の大きさ 四角形が円に内接するとき

[1] 対角の和は 180° である。

[2] 内角は、その対角の外角に等しい。

解答 (1) AB が円の直径であるから $\angle ACB = 90^\circ$

よって $\angle ABC = 180^\circ - (35^\circ + 90^\circ) = 55^\circ$

四角形 $ABCD$ は円に内接するから $\alpha = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$ 答

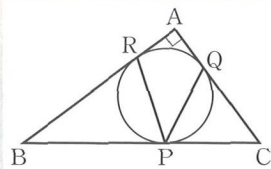
(2) 四角形 $ACDB$ は円に内接するから $\angle PAC = \alpha$

また $\angle ACP = \alpha + 51^\circ$

よって、 $\triangle APC$ において $\alpha + 25^\circ + (\alpha + 51^\circ) = 180^\circ$

これを解いて $\alpha = 52^\circ$ 答

3. 右の図で、点P, Q, Rは $\triangle ABC$ の内接円と辺との接点である。 $\angle A=90^\circ$, $BP=6$, $PC=4$ であるとき、次の問いに答えよ。



- (1) $\angle RPQ$ の大きさを求めよ。
- (2) 内接円の半径を求めよ。

指針 円と接線, 内接円の半径 $\angle A=90^\circ$ であることに注意する。

- (1) RとQを結ぶと、接線と弦の作る角の定理により $\angle ARQ=\angle RPQ$
- (2) 内接円の半径を r として、 $\triangle ABC$ に三平方の定理を用いる。

解答 (1) RとQを結ぶと、 $\angle RPQ=\angle ARQ$ ……①
 $\angle A=90^\circ$, $AR=AQ$ より、 $\angle ARQ=45^\circ$ ……②

①, ②から $\angle RPQ=45^\circ$ **答**

- (2) 内接円の半径を r , 中心をOとする。

四角形AROQは正方形であるから $AR=AQ=r$

また、 $BR=BP=6$, $CQ=CP=4$ より

$$AB=AR+BR=r+6, \quad AC=AQ+CQ=r+4$$

直角三角形ABCにおいて、三平方の定理により

$$(6+4)^2=(r+4)^2+(r+6)^2 \quad \text{整理すると} \quad r^2+10r-24=0$$

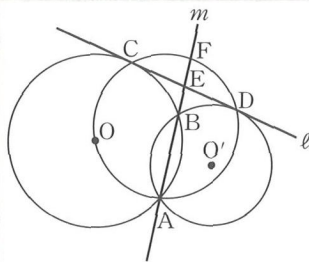
$$\text{すなわち} \quad (r-2)(r+12)=0 \quad r>0 \text{ であるから} \quad r=2$$

よって、求める内接円の半径は **2** **答**

別解 (2) $\triangle ABC=\triangle ABO+\triangle BCO+\triangle CAO$ から

$$\frac{1}{2}(r+6)(r+4)=\frac{1}{2}r\{(r+6)+10+(r+4)\} \text{ を解く。}$$

4. 2点A, Bで交わる2つの円O, O'がある。右の図のように、直線 ℓ が円O, O'にそれぞれ点C, Dで接している。また、2点A, Bを通る直線 m が、 ℓ と点Eで交わり、3点A, D, Cを通る円と点Fで交わる。このとき、四角形BDFCが平行四辺形であることを証明せよ。



指針 方べきの定理 直線 ℓ , m と円 O , 円 O' , 3点 A , D , C を通る円それぞれに方べきの定理を用いて, 四角形 $BDFC$ の対角線がそれぞれの中点で交わることを導く。

解答 円 O において, 方べきの定理により $EB \cdot EA = EC^2$
 円 O' において, 方べきの定理により $EB \cdot EA = ED^2$
 よって $EC^2 = ED^2$

$EC > 0$, $ED > 0$ より $EC = ED$ ……①

また, 3点 A , D , C を通る円において, 方べきの定理により

$$EF \cdot EA = EC \cdot ED$$

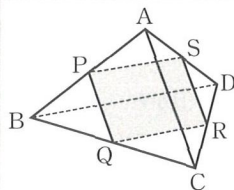
$EC = ED$ より $EF \cdot EA = EC^2 = EB \cdot EA$

よって $EF = EB$ ……②

①, ②より, 対角線がそれぞれの中点で交わるから, 四角形 $BDFC$ は平行四辺形である。終

教 p.123

5. 四面体 $ABCD$ の辺の中点 P , Q , R , S を右の図のようにとる。四角形 $PQRS$ は平行四辺形であることを示せ。



指針 中点連結定理 中点連結定理により, 2組の対辺がそれぞれ平行であることをいう。

解答 $\triangle BAC$, $\triangle DAC$ において, 中点連結定理により $PQ \parallel AC$, $SR \parallel AC$
 よって $PQ \parallel SR$ ……①

$\triangle ABD$, $\triangle CBD$ において, 中点連結定理により $PS \parallel BD$, $QR \parallel BD$
 よって $PS \parallel QR$ ……②

①, ②より, 2組の対辺がそれぞれ平行であるから, 四角形 $PQRS$ は平行四辺形である。終

別解 $\triangle BCA$ において, 中点連結定理により $PQ \parallel AC$, $PQ = \frac{1}{2}AC$

$\triangle DAC$ において, 中点連結定理により $SR \parallel AC$, $SR = \frac{1}{2}AC$

$PQ \parallel AC$, $SR \parallel AC$ であるから $PQ \parallel SR$ ……①

$PQ = \frac{1}{2}AC$, $SR = \frac{1}{2}AC$ であるから $PQ = SR$ ……②

①, ②より, 1組の対辺が平行でその長さが等しいから, 四角形 $PQRS$ は平行四辺形である。終

第2章 章末問題 B

教 p.124

6. $\triangle ABC$ の内心を I とし、直線 AI と $\triangle ABC$ の外接円との交点を D とするとき、 $DB=DC=DI$ である。このことを証明せよ。

指針 三角形の内心・外接円と証明 AI は角の二等分線であり、円周角が等しい弧の長さは等しいことを用いる。また、 $\triangle DBI$ は二等辺三角形となることに着目する。

解答 AI は $\angle BAC$ の二等分線であるから

$$\angle BAD = \angle CAD \quad \cdots \cdots ①$$

円周角が等しいから $\widehat{DB} = \widehat{DC}$

$$\text{よって } DB = DC \quad \cdots \cdots ②$$

BI は $\angle ABC$ の二等分線であるから

$$\angle CBI = \angle IBA \quad \cdots \cdots ③$$

弧 CD に対する円周角であるから

$$\angle DBC = \angle DAC$$

$$① \text{ から } \angle DBC = \angle BAD \quad \cdots \cdots ④$$

$$③, ④ \text{ から } \angle IBD = \angle DBC + \angle CBI$$

$$= \angle BAD + \angle IBA$$

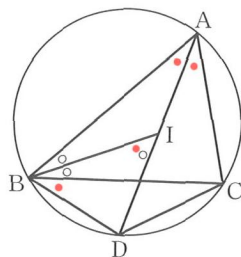
$$= \angle BID$$

← $\triangle ABI$ の内角と外角の性質による。

2つの角が等しいから、 $\triangle DBI$ は二等辺三角形である。

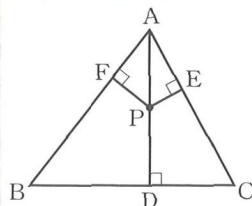
$$\text{よって } DB = DI \quad \cdots \cdots ⑤$$

$$②, ⑤ \text{ から } DB = DC = DI \quad \text{終}$$



7. 右の図のように、 $\triangle ABC$ の頂点 A から辺 BC に垂線 AD を下ろす。線分 AD 上に点 P をとり、 P から辺 CA , AB に、それぞれ垂線 PE , PF を下ろすとき、四角形 $BCEF$ は円に内接することを証明せよ。

教 p.124



指針 円に内接する四角形 四角形 $AFPE$, 四角形 $FBDP$ はともに円に内接することから、四角形 $BCEF$ の角について、円に内接する条件を導く。

解答 四角形 AFPE において、

$$\angle AFP + \angle AEP = 180^\circ$$

であるから、この四角形は円に内接する。

よって

$$\angle APF = \angle AEF \quad \cdots \cdots ①$$

また、四角形 FBDP において、

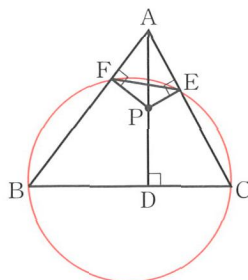
$$\angle BFP + \angle BDP = 180^\circ$$

であるから、この四角形は円に内接する。

よって $\angle APF = \angle FBD \quad \cdots \cdots ②$

①, ②より、 $\angle FBC = \angle AEF$ となるから、四角形 BCEF は円に内接する。

終



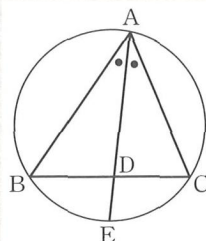
2 章

図形の性質

8. $\triangle ABC$ において、 $\angle A$ の二等分線と辺 BC との交点を D 、 $\triangle ABC$ の外接円との交点を E とする。このとき、次が成り立つことを証明せよ。

(1) $\triangle ABE \sim \triangle ADC$

(2) $AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD$



教 p.124

指針 方べきの定理の利用

- (2) (1)から $AB \cdot AC = AD \cdot AE$ また、方べきの定理により $BD \cdot CD = AD \cdot DE$ である。これらを使って、式を変形する。

解答 (1) $\triangle ABE$ と $\triangle ADC$ において

仮定から $\angle BAE = \angle DAC$

弧 AB の円周角であるから $\angle AEB = \angle ACD$

2組の角がそれぞれ等しいから $\triangle ABE \sim \triangle ADC$ 終

(2) (1)から $AB : AD = AE : AC$

$$AB \cdot AC = AD \cdot AE$$

$$= AD(AD + DE)$$

$$= AD^2 + AD \cdot DE \cdots \cdots ①$$

方べきの定理により

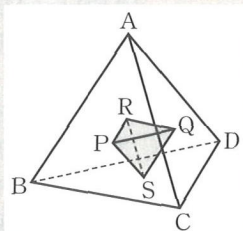
$$AD \cdot DE = BD \cdot CD \cdots \cdots ②$$

①, ②から

$$AB \cdot AC = AD^2 + BD \cdot CD$$

よって $AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD$ 終

9. 右の図のように、正四面体 ABCD の各面の重心 P, Q, R, S を頂点とする多面体がある。この多面体 PQRS について、次の問いに答えよ。



- (1) 多面体 PQRS が正四面体であることを示せ。
- (2) 多面体 PQRS と正四面体 ABCD の体積比を求めよ。

指針 多面体

- (1) 正四面体の各辺の中点を取り、三角形の重心の性質を利用して、多面体の各辺と、正四面体の各辺の比を導く。
- (2) (1)より、2つの正四面体は相似であることを利用する。

解答 (1) [1] 直線 AP と辺 BC の交点を T, 直線 AQ と辺 CD の交点を U とする。
P は $\triangle ABC$ の重心, Q は $\triangle ACD$ の重心であるから

$$AP : PT = 2 : 1,$$

$$AQ : QU = 2 : 1$$

よって, $PQ \parallel TU$, $PQ : TU = 2 : 3$ であるから

$$PQ = \frac{2}{3}TU$$

正四面体 ABCD の 1 辺の長さを a とする。

$$\triangle BCD \text{ に中点連結定理を用いると } TU = \frac{1}{2}a$$

$$\text{したがって } PQ = \frac{2}{3}TU = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{3}a$$

同様に、多面体 PQRS のすべての辺の長さは $\frac{1}{3}a$ であるから、多面体 PQRS のすべての面は合同な正三角形である。

[2] 4つの頂点に集まる正三角形の数はすべて3で等しい。

[1], [2]から、多面体 PQRS は正四面体である。 (図)

- (2) (1)より、正四面体 ABCD の 1 辺の長さを a とすると、正四面体 PQRS の 1 辺の長さは $\frac{1}{3}a$ である。よって、正四面体 PQRS と正四面体 ABCD は相似で、相似比は $1 : 3$ である。

したがって、体積比は $1^3 : 3^3 = 1 : 27$ (答)

